This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Phys 4880.5

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"

12 Sept., 1894

SCIENCE CENTER LIBRARY

PROBLÈMES

ET

CALCULS PRATIQUES

D'ÉLECTRICITÉ.

PRINCIPALES PUBLICATIONS DE L'AUTEUR :

Exercices de Physique et applications. Un beau vol. in-8, avec 114 figures dans le texte. Paris, 1889.

Cours de manipulations de Physique. Un beau volume in-8°, avec 166 figures dans le texte; 1883.

Études sur les moteurs à gaz tonnant. In-8°, avec figures dans le texte et 1 planche; 1884.

Essai sur l'effet thermique des parois d'une enceinte sur les gaz qu'elle renferme (Thèse inaugurale). In-4°, avec 3 planches; 1878.

L'ÉCOLE PRATIQUE DE PHYSIQUE.

Θ

PROBLÈMES

ET

CALCULS PRATIQUES

D'ÉLECTRICITÉ,

PAR

M. AIMÉ WITZ,
Docteur ès sciences,
Ingénieur des Arts et Manufactures,
Professeur aux Facultés catholiques de Lille.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1893
(Tous droits réservés.)

~~V. 4886~~
Phys 4880.5

HARVARD COLLEGE
SEP 12 1894
LIBRARY.

Farrar fund.

ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS ADOPTÉES.

l	Longueur.
^{m}, ^{km}, ^{cm}	Mètre, kilomètre, centimètre.
s	Surface.
m^2, cm^2	Mètre carré, centimètre carré.
v	Volume.
m^3, dm^3, cm^3	Mètre cube, décimètre cube, centimètre cube.
w	Vitesse.
ω	Vitesse angulaire.
f, p	Force, pression.
^{kg}, ^{gr}, ^{cgr}, ^{mgr}	Kilogramme, gramme, centigramme, milligramme.
$\mathfrak{T}$	Travail.
^{kgm}	Kilogrammètre.
$\mathfrak{P}$	Puissance.
^{ch}, HP	Cheval-vapeur, *Horse-power*.
kw	Kilowatt.
K	Moment d'inertie.
m	Quantité magnétique, intensité de pôle.
$\mathfrak{I}$	Intensité d'aimantation.
$\mathfrak{M}$	Moment magnétique.
H	Intensité de champ.
$\mathfrak{B}$	Induction magnétique.
F_1	Force magnétomotrice.
φ	Flux de force.
q, Q	Quantité d'électricité.
e, E	Force électromotrice, différence de potentiel.
I	Intensité de courant.
$I_{eff.}$	Intensité efficace d'un courant sinusoïdal.
R	Résistance des circuits.
r	Résistance intérieure des sources.
σ	Densité électrique superficielle.
C	Capacité électrique.
$\mathfrak{K}$	Capacité inductive spécifique.
W	Énergie électrique.
α	Résistance électrique spécifique.

ρ	Résistance magnétique spécifique.
$\mathcal{R}$	Résistance magnétique.
$\mathcal{F}$	Puissance d'un feuillet.
$\varkappa$	Susceptibilité magnétique.
μ	Perméabilité magnétique.
L_m	Coefficient d'induction mutuelle.
L_s	Coefficient de self-induction.
Cal	Calorie, kilogrammètre-degré (grande).
cal	Calorie, gramme-degré (petite).
J	Équivalent mécanique de la chaleur.
A	Équivalent calorifique du travail.
w	Quantité de chaleur.
f, c	Franc, centime.

INTRODUCTION.

UNITÉS DE MESURE.

I. — Unités fondamentales, C.G.S.

L'unité de longueur est le centimètre.
L'unité de masse est la masse du gramme.
L'unité de temps est la seconde.

II. — Unités dérivées, C.G.S.

La plupart des quantités dont on fait usage dans les sciences physiques peuvent s'exprimer en fonction de ces trois grandeurs, qu'on représente symboliquement par les lettres L, M et T.

Toutes les unités se déduisent de ces trois unités fondamentales; c'est pourquoi on leur donne le nom d'unités *dérivées*.

La relation qui lie une unité dérivée aux unités fondamentales se nomme l'*équation de dimension* de cette unité : cette équation définit l'unité, et à cet égard elle a une grande importance théorique. Mais sa valeur pratique n'est pas moindre, car l'équation de dimension permet de passer d'un système de mesures à un autre. Soit, en effet, une grandeur de dimension 3 en longueur, donc fonction de L^3; supposons que nous cherchions sa valeur numérique dans un système

dans lequel l'unité fondamentale de longueur soit n fois plus petite. Le nombre qui représentera la longueur deviendra n fois plus grand et l'expression de la grandeur considérée sera n^3 fois plus grande. Par conséquent, on trouvera le coefficient numérique par lequel il faut multiplier l'expression de la grandeur pour passer au nouveau système en évaluant l'ancienne unité fondamentale en fonction de la nouvelle et en portant cette valeur dans l'équation des dimensions. Un exemple fera mieux comprendre la chose : une capacité jauge un volume v en centimètres cubes; quel sera ce volume en millimètres cubes? L'équation de dimension d'un volume est précisément L^3; l'ancienne unité qui est le centimètre vaut 10 millimètres; portant cette valeur dans l'équation de dimension, nous trouvons le facteur $10^3 = 1000$, par lequel il faut multiplier v pour l'évaluer en millimètres cubes [1].

Unités géométriques.

L'unité de surface est le centimètre carré. Sa dimension est L^2.

L'unité de volume est le centimètre cube. Sa dimension est L^3.

L'unité d'angle est le radian; c'est une mesure circulaire, définie par le rapport de l'arc au rayon : l'angle unité est celui pour lequel ce rapport est égal à l'unité.

L'angle dont l'arc est égal au rayon a une valeur de

---

[1] Voici ce que M. Bertrand dit de ces équations de dimension : « Il ne s'agit pas, on le comprend, d'une égalité numérique entre les deux membres de l'équation dans laquelle ne figure aucune grandeur déterminée, mais de l'indication des variations simultanées que subiront les unités désignées par les lettres initiales des grandeurs correspondantes. » *Leçons sur la Théorie mathématique de l'électricité*, page 278.

$57^\circ 17' 44''$ [1]. Sa dimension est zéro, car on a $\frac{L}{L} = L^0$; du reste, un rapport est un nombre abstrait dont la dimension est zéro par rapport aux unités fondamentales.

Unités mécaniques.

La vitesse d'un mouvement uniforme est le quotient $\frac{L}{T}$ de l'espace parcouru par le temps mis à le parcourir : l'unité est le centimètre à la seconde. Sa dimension est $\frac{L}{T} = LT^{-1}$.

La vitesse angulaire ω est définie par le quotient $\frac{w}{R}$ de la vitesse w par le rayon R, car $w = \omega R$. Sa dimension est

$$\frac{\frac{L}{T}}{L} = \frac{1}{T} = T^{-1};$$

elle est homogène à l'inverse d'un temps.

L'accélération d'un mouvement uniformément varié est le quotient de l'accroissement de la vitesse par l'accroissement du temps; l'unité est le centimètre d'accroissement à la seconde. Sa dimension est $\frac{w}{T} = \frac{\frac{L}{T}}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$.

L'accélération g de la pesanteur est 980,88 à Paris, 983,11 au pôle et 978,1 à l'équateur, exprimée en centimètres d'accroissement à la seconde.

La force est le produit de la masse d'un corps par l'accélération qu'elle lui imprime, $f = Mj$; l'unité est celle qui communique l'unité d'accélération à l'unité de masse. On l'appelle *dyne*. Sa dimension est $MLT^{-2} = LMT^{-2}$.

---

[1] La circonférence $= \frac{2\pi R}{R} = 2\pi = 6,28$ radians.

Le poids d'un gramme communique à sa masse, la masse-gramme unité, une accélération égale à g; la dyne lui donne une accélération égale à l'unité : elle est donc 981 fois moindre, à Paris. Le poids du gramme varie avec la latitude et l'altitude, mais la dyne est constante.

A Paris, une dyne $= \frac{1}{981}$ gramme $= 0^{gr},001019$.

Une mégadyne $= 1019$ grammes.

Un gramme $= 981$ dynes.

Un kilogramme $= 0,981 \times 10^6$ dynes $= 0,981$ mégadyne.

Le travail d'une force est égal au produit de cette force par la projection sur sa direction du chemin parcouru par son point d'application, $\mathfrak{T} = fL$.

L'unité de travail est la dyne-centimètre ou erg. Sa dimension est LMT^{-2}. $L = L^2MT^{-2}$.

Un erg $= \frac{1^{gr}}{981} \times 1^{cm} = \frac{1}{981 \times 10^5}$ kilogrammètre.

Un megerg $= \frac{10}{981}$ kilogrammètre $= 0^{kgm},01019$.

Un kilogrammètre $= 98,1$ megergs.

Le foot-pound anglais $= 13,56$ megergs $= 0^{kgm},138$.

La force vive est une quantité de la même espèce que le travail; sa dimension est identique.

Un couple, dont le moment est homogène à un travail, a aussi les mêmes dimensions.

La puissance d'une machine est mesurée par le quotient du travail qu'elle effectue par le temps mis à le produire : elle est égale à $\frac{\mathfrak{T}}{T}$. Sa dimension est $\frac{L^2MT^{-2}}{T} = L^2MT^{-3}$.

L'unité de puissance devrait être l'erg-seconde.

En pratique, on emploie le kilogrammètre-seconde, le cheval-vapeur, le Horse-Power et le Poncelet.

Un kilogrammètre-seconde $= 98,1$ megergs par seconde.

Un cheval-vapeur $= 75$ kilogrammètres-seconde.

Un Horse-Power (HP) = 75,9 kilogrammètres-seconde.

Un Poncelet = 100 kilogrammètres-seconde.

Le cheval-vapeur vaut $75 \times 98,1 = 7,357 \times 10^3$ megergs-seconde.

Les électriciens ont adopté deux unités spéciales de travail et de puissance; la première est le joule, qui vaut 10 megergs, la seconde est le watt, équivalent à 10 megergs-seconde.

Un joule $= \frac{1}{9,81}$ kilogrammètre $= 0^{kgm},1019$.

Un watt $= \frac{1}{9,81}$ kilogrammètre par seconde.

Un cheval-vapeur = 736 watts.

Un Horse-Power = 746 watts.

Un kilowatt = 1000 watts = 1,36 cheval-vapeur = 1,34 HP.

Pour exprimer le travail fourni par une source, on fa souvent usage du cheval-heure et du watt-heure.

Un cheval-heure = $270\,000^{kgm}$ = 2648700 joules.

Un watt-heure = 3600 joules = 367^{kgm}.

Unités physiques.

L'unité de température est le degré centigrade.

L'unité de chaleur est la calorie; c'est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 0° à 1° C. la température d'un kilogramme d'eau distillée.

On emploie parfois une unité mille fois moindre, dite la *calorie-gramme* ou *petite calorie,* rapportée au gramme au lieu de l'être au kilogramme.

La chaleur étant une forme de l'énergie, il conviendrait de la mesurer en fonction de l'erg, du kilogrammètre ou du joule : c'est une réforme qui s'impose, mais qu'il sera bien difficile de réaliser. En attendant, on passe de la chaleur à

l'énergie mécanique à l'aide d'un coefficient appelé l'*équivalent mécanique de la chaleur*.

Une calorie $= 425^{kgm} = 4,17 \times 10^{10}$ ergs.

Une calorie-gramme

$$= 0^{kgm},425 = 4,17 \times 10^{7} \text{ ergs} = 4,17 \text{ joules.}$$

Un joule $= 0,24$ calorie-gramme.

L'unité de lumière a été définie par la Conférence internationale de 1884 : c'est la quantité de lumière émise normalement par un centimètre carré superficiel de platine fondu, à la température de la solidification; cet étalon a été créé par M. Violle.

Dans la pratique, on emploie fréquemment la lampe Carcel, de Dumas et Regnault, consommant 42^{gr} d'huile de colza (10^{gr} en $14^{m}17^{s}$) par un bec de $23^{mm},5$ de diamètre, ou bien des bougies de stéarine ou de blanc de baleine; M. de Heffner-Alteneck a proposé une lampe à acétate d'amyle.

Voici, d'après M. Violle, les valeurs relatives de ces étalons :

	1.	2.	3.	4.	5.
1. Unité Violle.....	1	2,08	16,1	18,5	18,9
2. Carcel.....	0,481	1	7,75	8,91	9,08
3. Bougie de l'Étoile..	0,062	0,130	1	1,15	1,17
4. Candle.....	0,054	0,112	0,870	1	1,02
5. Lampe Heffner.....	0,053	0,114	0,853	0,98	1

Le Congrès de 1889 a recommandé l'usage de la bougie décimale, dixième de Carcel, vingtième de l'étalon Violle.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS ADOPTÉES V

INTRODUCTION VII

LIVRE I.

Définitions et formules.

Chapitres.

I. Magnétisme 1

II. Électricité en équilibre ou électrostatique 14

III. Électricité en mouvement ou électrocinétique 23

IV. Électromagnétisme et électrodynamique 32

V. Induction 46

LIVRE II.

Constantes numériques.

Constantes physiques et chimiques 59

Constantes d'aimantation 60

Pouvoir rotatoire magnétique 63

Éléments du magnétisme terrestre 63

Distances explosives 64

Pouvoirs inducteurs spécifiques 66

Constantes d'électrolyse 66

Différences de potentiel au contact 69

Piles 70

Accumulateurs 71

Piles thermo-électriques 72

Résistances 74

Électro-aimants 80

Self-induction 81

Données relatives à l'éclairage 82

Données relatives aux génératrices d'électricité 84

LIVRE III.

Les Problèmes.

Chapitres.		Pages.
I.	Aimants	87
II.	Électricité en équilibre; potentiel	98
III.	Capacités	107
IV.	Constantes des piles	115
V.	Couplage des piles	130
VI.	Accumulateurs	140
VII.	Électrolyse et électrométallurgie	147
VIII.	Piles thermo-électriques	155
IX.	Rhéomètres	158
X.	Résistances	174
XI.	Dérivations	187
XII.	Effets thermiques des courants	192
XIII.	Actions électromagnétiques et électrodynamiques	200
XIV.	Électro-aimants	206
XV.	Mesure des champs	216
XVI.	Phénomènes d'induction	226
XVII.	Générateurs mécaniques d'électricité	236
XVIII.	Étude expérimentale des dynamos	253
XIX.	Calculs des dynamos	265
XX.	Électromoteurs	279
XXI.	Canalisations	284
XXII.	Transport de l'énergie à distance	296
XXIII.	Distribution de l'énergie	304
XXIV.	Éclairage	313

PROBLÈMES

ET

CALCULS PRATIQUES

D'ÉLECTRICITÉ.

LIVRE I.

DÉFINITIONS ET FORMULES.

CHAPITRE I.

MAGNÉTISME.

Un aimant est défini par une double propriété : il attire la limaille de fer et il s'oriente dans la direction nord-sud, quand on le suspend librement par son centre de gravité.

La force attractive est maximum vers les extrémités du barreau.

On appelle *pôle nord* et *pôle sud* les extrémités qui se dirigent vers le nord et vers le sud; ces mêmes pôles étaient nommés autrefois, par antinomie, *pôle austral et boréal.*

Les pôles de même nom se repoussent, les pôles de nom contraire s'attirent. Ces actions répulsives et attractives s'exercent en raison inverse du carré de la distance r des pôles mis en présence : elles sont du reste proportionnelles aux masses

magnétiques de ces pôles, m et m'. C'est la *loi de Coulomb :*

$$f = k\frac{mm'}{r^2}.$$

k est un coefficient dépendant du milieu dans lequel l'aimant est placé; mais on choisit les unités magnétiques de telle façon que, dans l'air, k soit égal à 1, et l'on écrit simplement

$$(1) \qquad f = \frac{mm'}{r^2}.$$

Les pôles d'un aimant sont les points d'application des résultantes des forces magnétiques exercées par l'aimant tout entier sur un point extérieur, placé à une distance suffisante pour que les directions des forces soient parallèles.

Le *moment magnétique* d'un barreau de longueur $2l$ est le produit de l'intensité m des pôles par leur distance $2l$:

$$\mathfrak{M} = 2ml.$$

L'*intensité d'aimantation* d'un barreau est définie par le rapport $\frac{\mathfrak{M}}{v}$ de son moment magnétique à son volume :

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{M}}{v}.$$

L'intensité d'aimantation en un point est donc le moment de l'unité de volume en ce point; elle a non seulement une grandeur, mais une direction déterminée en chaque point; elle est uniforme, si elle est partout constante de grandeur et de direction. Pour un barreau de section S, on a $v = 2l\mathrm{S}$ et, par suite,

$$(2) \qquad \mathfrak{I} = \frac{2ml}{2l\mathrm{S}} = \frac{m}{\mathrm{S}}, \qquad \text{d'où} \qquad m = \mathfrak{I}\mathrm{S}.$$

Donc la quantité résidant en un pôle est égale au produit de l'intensité d'aimantation par la section du barreau.

L'espace dans lequel s'exercent les actions de l'aimant constitue un *champ magnétique;* on en constate l'existence et on l'explore soit en y promenant une petite aiguille aimantée, soit en faisant un fantôme à l'aide de limaille de

fer, soit en se servant de tubes de Geissler, suivant le procédé découvert par l'auteur de ce livre.

Il y a à considérer, dans un champ, la direction, le sens et la grandeur des forces; leur direction est donnée par la direction de la petite aiguille ou par la tangente aux lignes dessinées par la limaille; leur sens est celui du mouvement que prendrait un pôle nord unique, abandonné dans le champ; leur grandeur se mesure par le nombre de dynes exercées sur l'unité de pôle. Ce nombre de dynes mesure l'*intensité* H *du champ* au point considéré.

Un champ est *uniforme* quand ses lignes de force sont parallèles; dans un tel champ, l'intensité H est la même en tous les points, ce qui justifie son nom.

Le déplacement d'un pôle dans le champ entraîne une dépense de travail; le travail de la force du champ sur l'unité de pôle nord (on dit fréquemment l'unité de masse positive), d'une position du champ à une autre, est égal à la différence des valeurs correspondantes d'une certaine fonction V des coordonnées appelée le *potentiel*. La valeur du potentiel en un point quelconque du champ est égale au travail qu'il faudrait dépenser pour amener l'unité de pôle nord depuis l'infini jusqu'à ce point. On démontre encore que le potentiel V est égal à la somme des quotients obtenus en divisant chacune des masses agissantes de l'aimant, créateur du champ, par leurs distances respectives au point considéré :

$$V = \sum \frac{m}{r}.$$

En posant V = const., on obtient une série de surfaces de niveau, appelées *surfaces équipotentielles*. La force magnétique en un point quelconque du champ est normale à l'équipotentielle passant par ce point; les lignes de force sont donc normales aux surfaces équipotentielles. Les surfaces équipotentielles sont analogues aux lignes de niveau en topographie et les lignes de force représentent les lignes de plus grande pente. La ligne de force est dirigée dans le sens de la décroissance du potentiel comme la ligne de pente est dirigée dans le sens de la décroissance des niveaux. Une masse positive

de magnétisme, abandonnée à elle-même, marche vers les points où le potentiel est le plus faible, en suivant les lignes de force : c'est ainsi que l'eau coule le long des pentes.

Ces analogies ont conduit à une autre définition, celle des flux de force. Prenons, sur une surface équipotentielle, un élément dS quelconque; les lignes de force, passant par le périmètre de cet élément, formeront dans l'espace une sorte de tube, qu'on appelle un *tube de force;* si f est la force au centre de gravité de l'élément, on donne le nom de *flux de force* au produit fdS et on le représente par la notation $d\varphi$

$$fdS = d\varphi.$$

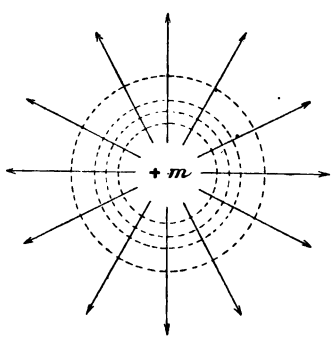
Quand on fait la sommation de tous les flux de force élémentaires émanés d'une surface fermée, on obtient le résultat suivant : le flux de force total, correspondant à une surface fermée quelconque, est égal à la quantité totale m de magnétisme, contenue dans la surface, multipliée par 4π :

$$(3) \qquad \varphi = \int f dS = 4\pi m.$$

C'est le *théorème de Green.*

Le champ magnétique créé par un seul pôle est facile à représenter sur le papier; les surfaces de niveau, correspon-

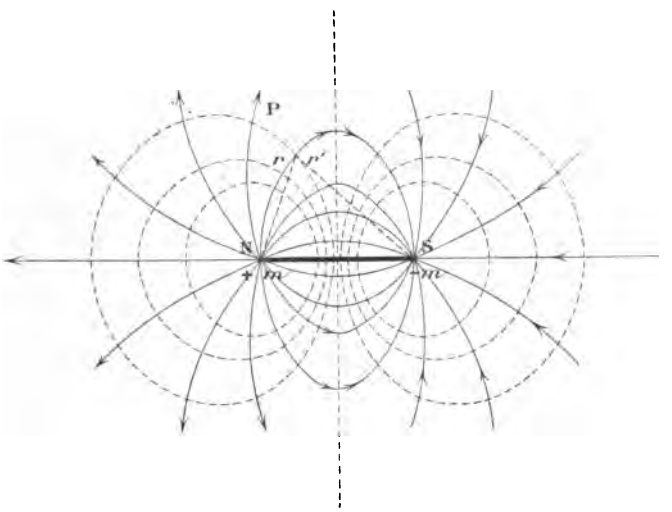
Fig. 1.



dantes à diverses valeurs de V, sont des sphères ayant pour centre le pôle, et les lignes de force sont des rayons de ces sphères; les sections de ces sphères par un plan sont des

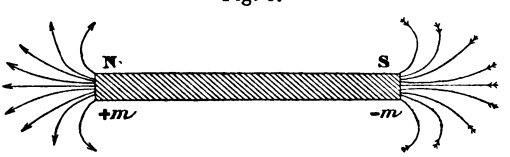
cercles concentriques. Pour des valeurs de V égales à n, 10, 5, 3, 2, 1, nous aurons pour rayons de ces cercles les valeurs $\frac{m}{n}$, $\frac{m}{10}$, $\frac{m}{5}$, $\frac{m}{3}$, $\frac{m}{2}$, m (*fig.* 1). Si le pôle est positif, les lignes de force auront le sens des flèches, car un pôle positif mobile serait repoussé.

Fig. 2.



Le champ d'un barreau aimanté, constitué par deux masses $+m$ et $-m$ égales et de signes contraires, est encore facile à dessiner, car tout est symétrique autour de NS; le potentiel en un point P est $V = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$; à chaque valeur de V

Fig. 3.

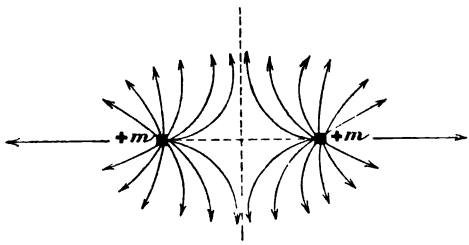


correspond une surface de niveau dont nous avons tracé, sur la *fig.* 2, la section méridienne. La *fig.* 3 montre uniquement

les lignes de force d'un barreau; par convention, on dit qu'elles sortent du pôle nord et rentrent dans le pôle sud.

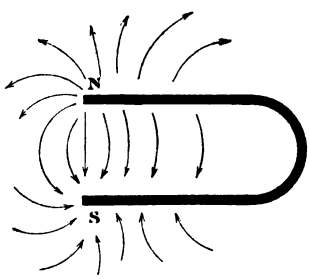
La *fig.* 4 donne les lignes de force entre deux pôles de même signe.

Fig. 4.



Les lignes de force d'un aimant en fer à cheval se voient sur la *fig.* 5.

Fig. 5.



Enfin (*fig.* 6), nous avons indiqué l'action d'un champ sur une aiguille aimantée. Cette figure est très suggestive, car elle matérialise les lignes de force en les représentant comme des fils élastiques, tendant à se raccourcir : c'est la loi que Faraday leur avait assignée. De plus, on peut constater que deux lignes de force de même sens se repoussent, alors que deux lignes de sens contraire s'attirent. Ces considérations sont très utiles dans la pratique, et c'est pour cela que nous nous y sommes arrêté si longuement.

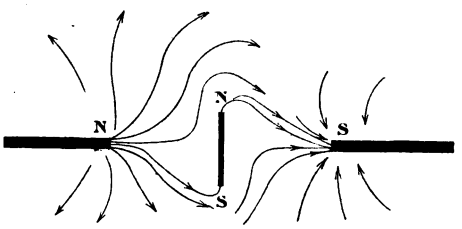
Un morceau de fer doux s'aimante temporairement lorsqu'il est amené dans un champ : c'est un phénomène d'*in-*

duction magnétique; l'aimantation ainsi développée est dite *aimantation induite;* les champs magnétiques sont donc inducteurs.

Le sens de l'aimantation induite est déterminé par la direction des lignes de force du champ; ainsi un barreau dont l'axe est disposé parallèlement à ces lignes prendra un pôle sud à l'extrémité par laquelle ces lignes entrent et un pôle nord à l'extrémité par laquelle elles s'échappent.

La présence du barreau dans le champ modifie le champ : le flux qui traverse la région où il est placé se trouve être plus

Fig. 6.



considérable que celui qui la traversait avant l'introduction du barreau magnétique. L'intensité d'aimantation produite est proportionnelle à ce nouveau flux, qui définit l'induction, quand on le rapporte à l'unité de surface; on l'appelle l'*induction magnétique* et on le représente par la lettre $\mathfrak{B}$. Par centimètre carré, $\mathfrak{B}$ est d'abord égal à H; mais l'intensité primitive du champ augmente de $4\pi \frac{m}{S} = 4\pi\mathfrak{I}$, de sorte que l'on a définitivement

$$\mathfrak{B} = H + 4\pi\mathfrak{I}. \tag{4}$$

L'induction magnétique est donc égale à l'intensité du champ augmentée de 4π fois l'intensité d'aimantation acquise par le barreau.

L'induction varie avec la *perméabilité* μ du corps magnétique;

$$\mathfrak{B} = \mu H.$$

Par suite, $\mu = \frac{\mathfrak{B}}{H}$; la perméabilité est donc égale au rap-

port de l'induction à l'intensité du champ : μ est plus grand que l'unité pour les corps magnétiques (fer, nickel, cobalt, chrome, manganèse, platine) et plus petit que l'unité pour les corps diamagnétiques, tels que le bismuth, l'antimoine, le zinc, le cuivre, etc. Mais ce coefficient μ est d'un emploi difficile dans les problèmes pratiques, car il n'est pas constant pour un corps déterminé : il varie avec de nombreuses conditions et notamment avec les états magnétiques qui ont précédé l'état actuel de la substance.

Quand on place des barreaux de nature différente dans un champ, on constate qu'ils prennent une intensité d'aimantation $\mathfrak{I}$ différente; on exprime ce fait en disant qu'ils n'ont pas la même *susceptibilité magnétique*. On donne ce nom à un coefficient d'aimantation induite égal au rapport de l'intensité d'aimantation à l'intensité du champ inducteur : on le note par le symbole $\varkappa$ et l'on écrit

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{I}}{\mathrm{H}}.$$

La susceptibilité est donc égale au rapport de l'intensité d'aimantation à l'intensité du champ.

Pour les corps magnétiques, $\varkappa$ est positif, tandis qu'il est négatif pour les diamagnétiques.

Le coefficient $\varkappa$ n'est pas plus constant que μ et il varie pour un même barreau, avec l'intensité H du champ; après avoir atteint un maximum, il décroît ensuite rapidement. Cette variation explique la *saturation* magnétique des noyaux de fer des électro-aimants.

On démontre sans peine que

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa. \tag{5}$$

Quand on introduit un barreau formé d'une substance magnétique dans un champ, il s'oriente de manière que ses lignes de force se superposent à celles du champ. Le flux qui traverse le barreau a alors pour valeur $\varphi = \mu \mathrm{HS}$, si le champ est uniforme et le barreau long et mince, H étant l'intensité du champ et S la section du barreau. On voit donc que la perméabilité est assimilable à une sorte de conducti-

bilité du flux magnétique et c'est ainsi qu'on a été amené à parler de *résistance magnétique*. On a, en effet, $\varphi = \frac{H}{\frac{1}{\mu S}} = \frac{H}{\mathcal{R}}$, H étant considéré comme une force magnétomotrice et $\mathcal{R} = \frac{1}{\mu S}$ étant envisagé comme une résistance, inverse de la section. Les corps magnétiques possèdent une résistance moindre que celle de l'air, prise pour unité, tandis que les diamagnétiques ont une résistance supérieure.

Le défaut de fixité de μ entraîne évidemment celle de $\mathcal{R}$; aussi l'analogie qu'on a voulu établir entre le circuit magnétique et le circuit électrique pèche-t-elle par la base; ces considérations sont néanmoins assez utiles, car elles nous permettent d'envisager les barreaux aimantés comme des conducteurs suivant lesquels se propagent les lignes de force, avec une facilité d'autant plus grande que leur perméabilité est plus considérable ou le circuit qu'ils forment moins résistant (1). Les flux de force se dérivent dans les différents chemins qui leur sont ouverts; ils prennent leur densité maximum dans les parties qui présentent la résistance minimum. Nous reviendrons sur ce fait en abordant le calcul des machines dynamos.

Il nous reste à étudier la constitution des aimants.

En rompant un barreau aimanté en plusieurs fragments, on obtient autant d'aimants, qui tous présentent deux pôles de même intensité et de noms contraires : on ne peut jamais obtenir un pôle unique. Cette expérience nous montre que le magnétisme est moléculaire : un barreau est donc constitué par des aimants infiniment petits, ayant des pôles de masse $+dm$ et $-dm$ et une longueur dl. Ces éléments, tous identiques entre eux, peuvent être rangés en files continues, parallèles à l'axe du barreau, se touchant par leurs pôles de noms contraires : ce système s'appelle un *filet solénoïdal*. Chaque filet est neutre dans toute sa longueur et il n'a de

(1) C'est dans ce sens qu'il faut entendre cette loi de Faraday qu'une ligne de force traversant une substance magnétique est *plus courte* qu'une ligne de force de même longueur traversant l'air.

magnétisme libre qu'à ses extrémités; l'action du filet se réduit à celle des masses extrêmes. Un barreau peut donc être considéré comme un paquet de filets solénoïdaux parallèles : c'est la *distribution solénoïdale*. Mais il y a aussi une *distribution lamellaire*, car on peut supposer que l'on a formé un barreau en empilant des lames infiniment minces, recouvertes sur leurs deux faces de quantités égales de magnétisme nord et sud : ces lames sont appelées des *feuillets;* nous arrivons encore à ne trouver de magnétisme que sur les faces terminales du barreau [1].

Les feuillets jouent un grand rôle en électromagnétisme et il importe de se familiariser avec cette notion.

On appelle *puissance d'un feuillet* le produit de son épaisseur infiniment petite ε par la densité superficielle du magnétisme sur ses faces σ; nous noterons la puissance par le symbole $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \varepsilon\sigma.$$

Gauss a démontré que le potentiel d'un feuillet en un point donné est égal au produit de la puissance de ce feuillet par l'angle ω sous lequel on voit de ce point le contour terminal du feuillet :

$$V = \mathcal{F}\omega. \tag{6}$$

Cet angle solide ω est découpé dans l'espace par une droite passant toujours par le point et glissant le long du contour du feuillet; si l'on décrit, du point comme centre, une sphère du rayon r, le cône décrit par la droite délimitera sur la sphère une surface S, qui donnera la valeur de ω, car $\omega = \frac{S}{r^2}$.

Si le feuillet forme une surface fermée, ω est nul pour un point extérieur et il est égal à 4π pour un point intérieur; d'où il résulte que le potentiel d'un feuillet fermé est nul sur un point extérieur et égal à $4\pi\mathcal{F}$ sur un point intérieur; mais l'action magnétique du feuillet fermé est nulle, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur.

---

[1] Comme la somme totale des masses magnétiques d'un aimant est nulle, le flux total qui émane d'un barreau est nul lui-même.

Quand m passe de la face négative d'un feuillet à sa face positive, le potentiel croît de $4\pi\mathcal{F}$, quel que soit le chemin suivi, soit qu'on ait traversé le feuillet, ou qu'on l'ait contourné : cette traversée coûte donc un travail.

Les lignes de force émanées d'un feuillet sont normales à sa surface; elles entrent par la face négative pour ressortir par la face positive. La position d'équilibre stable d'un feuillet dans un champ est donc celle où le flux, pénétrant par la face négative, est normal au feuillet.

Cette position d'équilibre stable est, comme dans tous les phénomènes de ce genre, celle qui correspond au minimum d'énergie potentielle; cela nous amène à parler de l'énergie des feuillets.

Un aimant, capable d'attraction ou de répulsion, possède une certaine énergie intrinsèque, qu'il doit au magnétisme qu'il renferme; mais, placé dans un champ, il a en outre une énergie relative, due à sa position dans le champ. Cette dernière représente le travail qu'il a fallu dépenser pour l'amener dans la position qu'il occupe : elle est positive ou négative.

Si φ est le flux qui traverse le feuillet par sa force négative, l'énergie relative du feuillet est égale à $-\mathcal{F}\varphi$; elle est égale au produit changé de signe de la puissance du feuillet par le flux de force qui traverse son contour en pénétrant par la orce négative :

$$W = -\mathcal{F}\varphi. \tag{7}$$

La position d'équilibre stable ou d'énergie minimum est donc bien celle que nous venons de dire.

Dans le champ terrestre, qui est uniforme, un aimant s'oriente par conséquent, comme nous l'avons dit, de façon que le flux entre par son extrémité sud et sorte par son extrémité nord.

La direction des lignes de force de champ terrestre se détermine par la *déclinaison* et l'*inclinaison*.

L'intensité du champ H est la force exercée sur l'unité de pôle placée dans le champ terrestre, dans la direction de l'aiguille d'inclinaison. Elle se décompose en deux, l'une horizontale H_h, l'autre verticale H_v. On a

$$H_v = H \sin i \qquad \text{et} \qquad H_h = H \cos i,$$

i étant l'angle d'inclinaison, c'est-à-dire l'angle formé par la direction de la force avec sa projection sur le plan horizontal.

Les intensités de champ s'énoncent en dynes.

Unités magnétiques C.G.S.

Masse ou quantité. — En faisant $m = m'$ dans l'équation de Coulomb (1), on en déduit $fr^2 = m^2$ et $m = r\sqrt{f}$. L'unité de quantité est donc celle qui, agissant sur une quantité égale, de même signe, placée à la distance de 1^{cm}, la repousse avec la force d'une dyne.

$$\text{Dimension : } m = L\sqrt{LMT^{-2}} = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Moment. — Le moment d'un aimant se déduit de la masse possédée par ses pôles :

$$\mathfrak{M} = 2ml = L^{\frac{5}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

L'unité de moment est celle d'un aimant, mesurant 1^{cm} de longueur, dont les pôles ont l'unité de masse.

Intensité. — L'unité d'intensité d'aimantation est celle d'un barreau de 1^{cm3} de volume, aimanté uniformément dans le sens d'une arête, et dont le moment est égal à l'unité.

$$\text{Dimension : } \mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{M}}{v} = \frac{L^{\frac{5}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}}{L^3} = L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Champ. — L'intensité d'un champ est définie par la force magnétique de ce champ, appliquée à l'unité de masse.

L'unité d'intensité de champ est celle d'un champ qui exerce une force d'une dyne sur l'unité de pôle :

$$H = \frac{f}{m} = \frac{LMT^{-2}}{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}} = L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Flux. — L'unité de flux est le flux qui traverse 1^{cm2}, quand l'intensité de champ est 1.

$$\text{Dimension : } \varphi = HS = L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}L^2 = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Potentiel. — Le potentiel créé par l'unité de masse à l'unité de distance est l'unité de potentiel.

$$\text{Dimension : } V = \frac{m}{r} = \frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}}{L} = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

C'est la dimension d'un travail divisé par la quantité.

Induction. — L'unité d'induction correspond à l'unité de flux par centimètre carré.

$$\mathfrak{B} = \frac{\varphi}{S} = \frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}}{L^2} = L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Perméabilité et susceptibilité. — Ce sont des coefficients numériques n'ayant pas de dimensions.

Puissance. — La puissance d'un feuillet se mesure par le produit $\varepsilon\sigma$; l'unité de puissance est celle d'un feuillet de 1^{cm} d'épaisseur ayant l'unité d'intensité d'aimantation, c'est-à-dire pour lequel la densité superficielle est 1. Or la densité $\sigma = \frac{m}{S}$ et elle a pour dimension

$$\frac{m}{L^2} = L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

La dimension de l'unité de puissance est donc

$$L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}L = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

Ce sont les dimensions du potentiel, comme cela devait être, en vertu du théorème de Gauss.

Il est important de constater que l'intensité d'aimantation est homogène à une intensité de champ, qu'un flux est homogène à une quantité et que la puissance d'un feuillet est homogène à un potentiel.

Nous désignerons les unités magnétiques C.G.S., dont le système a pour base la loi de Coulomb, par le symbole U.M. Aucune de ces unités n'a reçu de nom spécial.

CHAPITRE II.

ÉLECTRICITÉ EN ÉQUILIBRE OU ÉLECTROSTATIQUE.

Le frottement, la percussion, la compression, le contact de substances hétérogènes donnent aux corps un état particulier, qui se manifeste par la propriété qu'ils acquièrent alors d'attirer les corps légers : on dit que ces corps sont chargés d'électricité ou plus simplement qu'ils sont électrisés.

Les corps électrisés attirent les corps neutres placés dans le champ de leur action, mais ils ne s'attirent pas toujours entre eux : ils attirent les uns et repoussent les autres. Les phénomènes électriques présentent donc un caractère de dualité qui nous oblige de considérer deux modes d'électrisation des corps; les uns sont positifs, les autres négatifs; de deux corps frottés, l'un est d'un signe, l'autre est toujours du signe contraire.

Deux corps de même signe se repoussent.

Les actions attractives ou répulsives s'exercent en raison inverse du carré des distances.

Le degré d'électrisation d'un corps se mesure par l'action qu'il exerce à une distance déterminée; c'est ainsi que nous acquérons la notion de la *quantité* d'électricité. La charge d'un corps, pouvant être égale à celle d'un autre ou bien à la somme des charges de deux ou plusieurs corps, est par le fait même mesurable : ce résultat s'exprime sous une forme concise en disant qu'un corps est chargé d'une quantité q d'électricité. L'unité de quantité est celle qui, agissant sur une quantité égale, placée à un centimètre de distance, exerce sur elle une force égale à une dyne. Cette définition résulte de la loi de Coulomb, dont l'expression est $f = k\frac{qq'}{r^2}$: k est une

constante dépendante du milieu, que, par un choix convenable d'unités, on fait égale à 1 dans l'air; nous avons adopté la même convention pour définir les masses magnétiques.

Quand on électrise un corps métallique, on observe que l'électricité se répand instantanément sur toute sa surface et qu'elle y réside entièrement; sur un disque d'ébonite, au contraire, l'électricité ne se répartirait qu'avec une extrême lenteur et elle se localiserait au point où elle aurait été développée. Les métaux sont de bons conducteurs, l'ébonite est un mauvais conducteur, et tous les corps le sont plus ou moins, mais à des degrés fort divers.

La *densité superficielle* d'un conducteur, sur lequel l'électricité est distribuée uniformément, est égale au quotient de la quantité, qui constitue sa charge totale, par la surface du conducteur :

$$\sigma = \frac{Q}{S}.$$

Toutes les considérations de *champ*, de *lignes de force*, de *tubes de force*, de *flux de force*, de *potentiel* et de *surfaces de niveau*, que nous avons longuement développées à propos du magnétisme, sont applicables identiquement à l'électricité en équilibre : nous ne les répéterons pas.

Le *théorème de Green*, relatif au flux de force sortant d'une surface donnée, est encore vrai :

$$\varphi = 4\pi Q = \int f\, dS.$$

Par convention, on dit que le flux *sort* d'une surface chargée positivement et qu'il *rentre* dans les surfaces chargées négativement; toute ligne de force part donc d'une région positive et va aboutir à une région négative. On peut dire encore que le flux émis par l'électricité positive d'un élément dS est absorbé par un élément correspondant dS' chargé d'électricité négative. Un tube de force allant d'un conducteur à un autre renferme donc toujours des électricités de signe contraire à ses extrémités. Un tube de force ne s'appuie jamais sur deux bases chargées de même électricité.

L'expérience et la théorie sont d'accord pour affirmer que, dans l'intérieur d'un conducteur en équilibre, la force est

nulle et le potentiel constant; c'est donc un volume de niveau, duquel les lignes de force émanent et auquel elles aboutissent normalement.

La force électrique en un point du champ est égale et de signe contraire à la dérivée du potentiel par rapport à la normale à la surface équipotentielle passant par ce point :

$$f = -\frac{dV}{dn}. \tag{8}$$

dn est compté sur la normale; dx étant compté sur une direction quelconque, que nous pouvons prendre pour celle de l'axe des x, on aurait

$$f_x = X = -\frac{dV}{dx}.$$

Laplace et Poisson ont énoncé le théorème suivant : *La somme des trois dérivées secondes partielles du potentiel, par rapport à trois axes rectangulaires, est égale au produit, changé de signe, de 4π par la densité au point considéré :*

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \Delta V = -4\pi\rho. \tag{9}$$

S'il n'y a pas d'électricité au voisinage du point considéré, ρ est égal à zéro, et nous avons $\Delta V = 0$.

Enfin nous devons à Coulomb cette autre proposition : *La force électrique en un point très voisin d'un conducteur en équilibre est égale à la densité électrique superficielle σ dans le voisinage du point, multipliée par 4π :*

$$f = -\frac{dV}{dn} = 4\pi\sigma. \tag{10}$$

On en déduit

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}. \tag{11}$$

Quand le potentiel est connu, on connaît donc aussi la densité électrique en un point déterminé.

La *pression électrostatique,* c'est-à-dire la pression exercée par l'unité de surface d'un conducteur chargé à une densité σ, est

$$p = \frac{1}{8\pi} f^2 = 2\pi\sigma^2. \tag{12}$$

Cette pression est toujours dirigée vers l'extérieur, quel que soit le signe de σ. En vertu de cette pression, l'électricité tend à s'échapper d'un corps isolé et à pénétrer l'isolant. Elle est proportionnelle au carré de la densité.

Dans un conducteur en équilibre, le potentiel est le même en tous ses points; ainsi deux conducteurs, réunis par un fil conducteur, sont au même potentiel; mais la pression électrostatique peut varier en tous leurs points.

Sur une sphère, la pression électrostatique est la même en tous ses points; son potentiel est égal au quotient $\frac{Q}{R}$ de sa charge totale par son rayon. On dit que le potentiel de la Terre est zéro; de fait, R est alors très grand.

Si l'on réunit par un fil deux conducteurs qui sont à des potentiels différents, leurs potentiels s'égalisent, parce qu'il se produit un courant allant de celui qui est au potentiel le plus élevé vers celui qui est au potentiel le plus faible. Cette différence de potentiel constitue une *force électromotrice.*

L'expérience et le calcul montrent qu'il n'y a qu'un seul état possible d'équilibre; si l'on augmente la charge totale d'un corps, on augmente dans le même rapport la charge de tous les points; comme $V = \sum \frac{q}{r}$, on voit que le potentiel croît avec la charge. Le potentiel est donc proportionnel à la charge

$$Q = CV.$$

Le paramètre C dépend d'abord de la forme et des dimensions du corps; on l'appelle la *capacité* du conducteur. C'est le rapport de la charge d'un corps au potentiel auquel il se trouve porté. On dit encore que la capacité du corps est la charge qu'il faut lui donner pour le porter au potentiel 1; mais nous allons voir que cette capacité n'est pas constante,

attendu qu'elle dépend aussi de la position du corps dans le champ. Supposons un instant que les corps qui l'entourent soient tous au potentiel de la Terre; alors la capacité du conducteur serait définie. Avec cette restriction, on peut dire que la capacité d'une sphère est égale à son rayon, et qu'un conducteur quelconque a une capacité déterminée C.

La variation de la capacité est un effet d'*induction*.

L'introduction d'un conducteur isolé, non chargé, dans un champ a pour effet de porter ce conducteur au potentiel moyen de la région dans laquelle il se trouve placé. Sa surface devient une surface équipotentielle; du même coup, la forme du champ initial a changé. Le conducteur est électrisé. Si ce corps avait eu une charge initiale, son potentiel aurait changé. Dans le cas où il posséderait une charge constante, son potentiel baisserait; donc sa capacité augmenterait.

Ainsi l'influence des corps voisins modifie la capacité des conducteurs; c'est par ce fait que s'explique le fonctionnement des *condensateurs*. Ils condensent en ce sens que, pour une même charge, leur potentiel baisse; ils peuvent donc recevoir un supplément de charge d'une source donnée.

On appelle *condensateur* un ensemble de deux conducteurs quelconques, séparés par un corps isolant ou diélectrique.

Supposons d'abord qu'ils aient la forme de deux sphères concentriques (*fig.* 7); la sphère intérieure aurait une capacité R, si l'extérieure n'existait pas; enveloppée par cette dernière, que nous relierons à la Terre, la capacité devient $\frac{RR_1}{e} = \frac{R^2}{e}$, e étant l'épaisseur de l'isolant. Cet accroissement de capacité définit le *pouvoir condensant* de l'appareil : ce pouvoir est égal au rapport des capacités avant et après l'action de la sphère extérieure.

En multipliant $\frac{R^2}{e}$ par 2π haut et bas, on obtient

$$C = \frac{S}{4\pi e}. \tag{13}$$

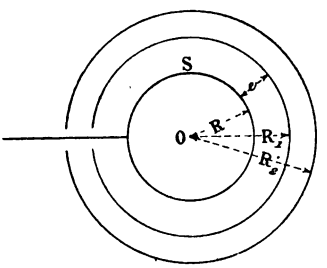
Tout condensateur fermé a la même capacité.

La capacité d'un condensateur cylindrique par unité de longueur est, pour des rayons R_1 et R,

$$C = \frac{1}{2\log' \frac{R_1}{R}}. \qquad (14)$$

Pour des cylindres très rapprochés, bien qu'ouverts aux bouts, on admet encore que $C = \frac{S}{4\pi e}$, S étant la surface de l'armature cylindrique, et cette formule peut être appli-

Fig. 7.



quée à la bouteille de Leyde. On l'étend aux condensateurs plans [1].

Un cylindre et un plan, placés à une distance D, ont une capacité, par unité de longueur, donnée par la formule

$$C = \frac{1}{2\log' \frac{D}{R}}. \qquad (15)$$

Cette formule sert au calcul de la capacité des lignes aériennes.

La capacité totale d'une batterie formée de n condensateurs, ayant chacun une capacité C, est égale à nC; celle

[1] Dans ce cas, la densité est plus grande sur les bords, mais on admet que la distribution est uniforme, lorsque la distance e est très petite relativement à la surface.

d'une cascade, composée de n condensateurs, est au contraire égale à $\frac{C}{n}$.

Les actions électriques se transmettent à travers les isolants; c'est pourquoi Faraday leur a donné le nom de *diélectriques*. Mais l'expérience prouve que la nature du diélectrique modifie les actions électriques; ainsi, suivant que les deux armatures d'un condensateur sont séparées par une couche d'air, de soufre ou de verre, leur capacité change; elle croît généralement. Faraday a appelé *capacité inductive spécifique* ou *pouvoir inducteur spécifique* d'un diélectrique, le rapport des charges que prend, toutes choses égales d'ailleurs, un condensateur quand on substitue ce diélectrique à l'air. Par exemple, le mica a un pouvoir spécifique égal à 5, parce qu'une lame de mica quintuple la capacité d'un condensateur dont les armatures étaient primitivement séparées par une lame d'air de même épaisseur.

L'électrisation d'un conducteur exige une dépense de travail qui s'emmagasine dans la charge sous forme d'énergie potentielle. Une augmentation de charge dq coûte un travail $dW = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$; une charge déterminée Q représente par suite un travail, c'est-à-dire une énergie

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV. \tag{16}$$

L'énergie est donc égale au demi-produit de la charge par le potentiel correspondant.

Pour un condensateur, nous aurons

$$W = \frac{S}{8\pi e}V^2.$$

L'énergie d'un condensateur est par conséquent proportionnelle au carré du potentiel de sa charge, proportionnelle à sa surface et en raison inverse de l'épaisseur du diélectrique.

Le travail dépensé dans la charge d'un conducteur se

retrouve dans sa décharge : on peut ainsi mesurer l'énergie accumulée dans un condensateur, soit en faisant communiquer le collecteur avec le sol, soit en réunissant ses deux armatures et en relevant le nombre de calories produites de ce chef.

Le déplacement dans un champ d'un conducteur chargé et isolé est accompagné d'un travail positif ou négatif : si le déplacement est déterminé par les attractions ou les répulsions électriques, le travail est emprunté à l'énergie du conducteur chargé et celle-ci diminue; elle augmenterait si une force extérieure intervenait pour produire le mouvement. Un corps neutre étant attiré dans le champ, sa présence ferait baisser les potentiels en augmentant les capacités. Dans tous les mouvements produits spontanément, la capacité tend vers un maximum et cette règle générale permet de prévoir le sens des déplacements.

UNITÉS ÉLECTROSTATIQUES.

Ce système d'unités, qui procède de la loi de Coulomb comme le système magnétique, précédemment exposé, n'en diffère en rien, si ce n'est par les dénominations, qui sont électriques au lieu d'être magnétiques : il n'y a donc pas lieu d'y revenir.

Mais il faut le compléter.

La *capacité* est le quotient de la charge du conducteur par son potentiel; l'unité de capacité est celle d'un conducteur dont le potentiel augmente d'une unité quand on augmente sa charge de l'unité de quantité.

Son étalon est une sphère de 1^{cm} de rayon.

Sa dimension est $\dfrac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}}{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}} = L$: c'est une longueur.

Le *pouvoir inducteur spécifique* étant un rapport, donc un nombre, a une dimension zéro.

L'unité de *force électromotrice* ou de *différence de potentiel* est le potentiel auquel il faut élever l'unité de quantité pour obtenir une énergie potentielle d'un erg.

On désigne ces unités par les mots *unités électrostatiques* C.G.S. et par le symbole U.E.S.; elles sont peu employées, car on préfère introduire dans le langage les unités mieux connues du système pratique électromagnétique. Il est bon cependant de savoir passer d'une unité à l'autre.

Une unité électrostatique	de *quantité* vaut.....	$\frac{1}{3.10^9}$ *coulombs.*
»	de *force électromotrice*..	3.10^2 *volts.*
»	de *capacité*.....	$\frac{1}{9.10^5}$ *microfarads.*

CHAPITRE III.

ÉLECTRICITÉ EN MOUVEMENT OU ÉLECTROCINÉTIQUE.

Quand on établit une communication entre deux conducteurs maintenus à des potentiels différents, il se produit entre eux un flux d'électricité, c'est-à-dire un *courant :* sa cause est l'inégalité de niveau des deux conducteurs; son *intensité,* c'est-à-dire la quantité d'électricité qui passe dans l'unité de temps, est proportionnelle à cette différence de potentiel, qu'on appelle la *force électromotrice;* elle varie d'autre part en raison inverse de la *résistance* du circuit. Cette loi a été formulée par Ohm, en appliquant à l'électricité les résultats obtenus par Fourier dans l'étude de la propagation du calorique; elle est exprimée par la relation bien connue donnant l'intensité I en fonction de la force électromotrice E et de la résistance R :

$$I = \frac{E}{R}. \tag{17}$$

Quand on veut mettre en évidence la résistance r de la source, on écrit $I = \frac{E}{R + r}$, R étant celle du circuit extérieur.

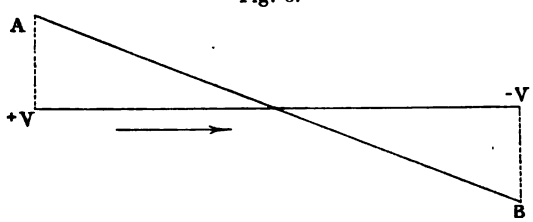
La force électromotrice E est une constante du générateur constituant la source d'électricité; la résistance R du circuit est égale à $\frac{l}{cs}$, car elle est proportionnelle à la longueur l du fil conjonctif, en raison inverse de sa section s et elle varie avec $\frac{1}{c}$, qui est la *résistance spécifique* de la matière du conducteur, c'est-à-dire la résistance d'un cube, de 1^{cm} de côté,

entre ses faces opposées : c est la *conductibilité spécifique* de la substance.

Nous désignerons, pour plus de commodité, la résistance spécifique par le symbole α; quant à la conductibilité c, nous n'en ferons généralement point usage.

Le potentiel décroît en progression arithmétique le long du fil, dans le sens de la propagation du courant; la courbe des potentiels est représentée géométriquement par la ligne droite AB (*fig.* 8), entre les deux pôles de la source, aux

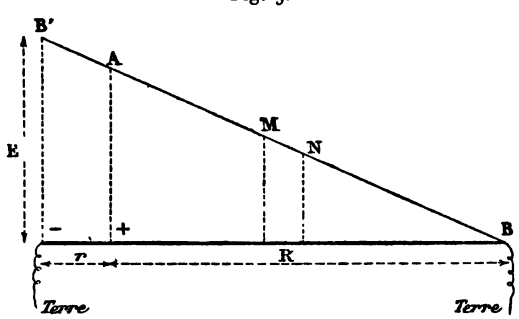
Fig. 8.



niveaux — V et + V. Les potentiels sont rapportés au potentiel moyen de la Terre, pris comme zéro de l'échelle.

Dans un conducteur homogène, dont l'extrémité B est à la Terre, le potentiel varie d'un point M (*fig.* 9) à un autre

Fig. 9.



point N proportionnellement à la distance qui sépare ces points de l'extrémité B. Le potentiel au pôle A se rapprochera d'autant plus de la force électromotrice E de la source

que la résistance intérieure r de cette source sera moindre relativement à R, la résistance du conducteur.

Le couplage des résistances peut s'opérer de plusieurs façons; on peut les monter *à la suite*, ce qui s'exprime en disant qu'elles sont *en série;* dans ce cas, la résistance totale est évidemment égale à la somme des résistances partielles.

On peut aussi les disposer parallèlement, en faisceau, de manière que le courant les traverse toutes ensemble; les conducteurs sont alors *en dérivation*. On appelle *résistance réduite* la résistance unique équivalente à celle des résistances ainsi couplées.

Les lois de Kirchhoff permettent de traiter complètement le problème général des dérivations :

Première loi. — *Lorsque plusieurs conducteurs aboutissent à un même point, la somme des intensités des courants qui traversent ce point est nulle :*

$$\Sigma I = 0. \tag{18}$$

Deuxième loi. — *Pour toute figure fermée d'un réseau, la somme du produit des intensités des courants par les résistances des circuits est égale à la somme des forces électromotrices comprises dans la figure fermée :*

$$\Sigma IR = \Sigma E. \tag{19}$$

M. Bosscha a déduit de ces lois deux corollaires qu'il est utile de connaître :

1° Si l'intensité du courant est nulle dans une branche d'un circuit, on ne change pas le régime du système en faisant varier la résistance de cette branche de zéro à l'infini, ou même en coupant cette branche.

2° Lorsqu'il se trouve dans le système deux conducteurs A et B tels qu'une force électromotrice placée en A n'envoie aucun courant en B, on peut faire varier la résistance de A de zéro à l'infini ou même couper ce conducteur sans changer le régime en B.

Prenons le cas le plus simple de deux dérivations R′ et R″, branchées entre deux points d'un circuit traversé par un cou-

rant d'intensité totale I; soient R la résistance du conducteur principal et E la force électromotrice de la source; ce courant I en donne deux autres I′ et I″; les intensités de ces courants dérivés sont en raison inverse des dérivations respectives :

$$\frac{I'}{I''} = \frac{R''}{R'}. \tag{20}$$

On tire de cette équation les suivantes

$$I' = I\frac{R''}{R'+R''} \quad \text{ou} \quad I'' = I\frac{R'}{R'+R''}$$

et

$$I = \frac{E(R'+R'')}{RR'+RR''+R'R''}. \tag{21}$$

La résistance réduite x s'en déduit sans peine, car on a

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}, \tag{22}$$

d'où

$$x = \frac{R'R''}{R'+R''}.$$

La résistance formée par l'ensemble du faisceau des dérivations est donc moindre que la plus petite des résistances de ces dérivations, car le facteur $\frac{R''}{R'+R''}$ est évidemment plus petit que 1.

Pour un nombre quelconque de conducteurs, on aurait encore

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} + \frac{1}{R'''} + \ldots.$$

Un *shunt* de résistance S étant intercalé entre les bornes d'un galvanomètre de résistance G, le pouvoir multiplicateur du shunt, c'est-à-dire le coefficient par lequel il faut multiplier l'intensité observée pour connaître l'intensité du courant total, est égal à

$$n = \frac{G+S}{S}. \tag{23}$$

Pour obtenir un pouvoir multiplicateur donné n, on fera donc

$$S = \frac{G}{n-1},$$

soit $S = \frac{G}{9} = \frac{G}{99} = \frac{G}{999}$ pour $n = 10 = 100 = 1000$.

La résistance totale x du shunt et du galvanomètre se calcule de même :

$$x = \frac{GS}{G+S}. \tag{24}$$

L'énergie d'un courant peut donner lieu à un travail mécanique, un changement d'état physique, une décomposition chimique ou un dégagement de chaleur; elle est toujours égale au produit de la quantité d'électricité mise en mouvement par la chute de potentiel entre deux niveaux considérés :

$$W = Q(V_1 - V_2) = It(V_1 - V_2) = EIt.$$

Entre deux points séparés par une résistance R, nous aurons dans le temps t

$$W = I^2Rt = \frac{E^2}{R}t.$$

La quantité de chaleur équivalente w sera donnée par l'équation

$$w = AI^2Rt = A\frac{E^2}{R}t; \tag{25}$$

elle est proportionnelle à l'équivalent calorifique du travail A, au carré de l'intensité du courant et à la résistance du conducteur.

C'est la *loi de Joule,* qui est applicable même à la période variable :

$$w = A\int_0^t I^2R\,dt.$$

Admettons qu'entre les deux points considérés, séparés par une résistance R, il y ait une chute brusque e de potentiel,

indépendante de l'intensité du courant; nous aurons, dans l'unité de temps,

$$(26) \qquad w = A[I(IR + e)] = AI^2R + AIe.$$

Cette chaleur se compose de deux parties : l'une qui échauffe toute la longueur du conducteur, d'après la loi de Joule; l'autre qui est localisée en un point, et qui est positive, si la chute se fait dans le sens du courant : c'est l'*effet Peltier*.

Le dégagement de chaleur indiqué par la loi de Joule se produit même dans les électrolytes traversés par le courant; mais on constate alors entre les électrodes une chute de potentiel qui correspond à l'énergie absorbée par le travail chimique. Cela devait être en vertu du principe de la conservation de l'énergie.

Quand un courant traverse un corps composé liquide, il peut le décomposer en ses éléments : c'est le phénomène de l'électrolyse; le liquide soumis à l'action du courant est un électrolyte. Les métaux se portent à l'électrode négative, dite *cathode;* les radicaux qui leur sont unis se déposent à l'électrode positive, dite *anode*.

Faraday a formulé les *lois de l'électrolyse*.

1° Les quantités d'un même électrolyte, décomposées par divers courants, sont proportionnelles à la quantité d'électricité qui a passé.

2° Les quantités de divers électrolytes, décomposées par une même quantité d'électricité, sont proportionnelles à leurs équivalents chimiques.

Ainsi l'unité pratique de quantité, le coulomb, décompose toujours $\frac{1}{96600} = 0,0000103 5$ de l'équivalent de l'électrolyte.

Becquerel a complété la théorie de Faraday par la loi suivante : La décomposition est toujours régie par l'élément électronégatif, jouant le rôle de radical.

Aussi est-il utile d'écrire $Fe^{\frac{2}{3}}Cl$, $Sn^{\frac{1}{2}}Cl$ au lieu de Fe^2Cl^3 et $SnCl^2$.

Le travail électrique étant toujours représenté par le produit $Q(V_1 - V_2)$, on est obligé de conclure qu'il doit exister entre les électrodes une différence de potentiel variable avec la nature de l'électrolyte; sinon le travail de décomposition d'un

équivalent serait toujours le même; or cela ne peut être, car la décomposition d'un équivalent des divers composés exige des quantités de chaleur fort inégales. Ces valeurs différentes de $V_1 - V_2$ se déterminent par les considérations suivantes.

Soient I l'intensité du courant qui traverse l'électrolyte, R sa résistance, q la chaleur de formation d'un équivalent, ε l'équivalent électrochimique, c'est-à-dire le poids décomposé par un coulomb; admettons qu'il n'intervienne aucune énergie extérieure :

$$AI^2R + I\varepsilon q = 0,$$

$$I = -J\frac{\varepsilon q}{R} = \frac{e}{R}.$$

Donc, en valeur absolue, nous avons

$$e = J\varepsilon q. \tag{27}$$

e est la force électromotrice inverse de l'électrolyte : elle a pour mesure, en unités absolues, le produit de l'équivalent mécanique de la chaleur J par la quantité εq de chaleur absorbée par la libération de 1^{éq} électrochimique d'un des éléments de l'électrolyte. Cette loi est connue sous le nom de *loi de Thomson*.

Le travail chimique serait impossible, si la chaleur de combinaison de l'électrolyte (égale à sa chaleur de décomposition) était supérieure à la chaleur équivalente à l'énergie du courant. Une pile de Volta ne saurait décomposer l'eau.

Nous plaçant à un autre point de vue, nous dirons que la décomposition d'un électrolyte n'est possible que si la différence de potentiel, établie par le courant entre les électrodes, est supérieure à la force électromotrice inverse de l'électrolyte, c'est-à-dire à la *polarisation* des électrodes. Le dépôt des éléments de l'électrolyte, produit sur les électrodes, suffit pour expliquer le phénomène de la polarisation. Les électrodes polarisées sont de véritables condensateurs, dont la capacité dépend de leur état et de leurs dimensions; la force électromotrice du courant secondaire, produit par leur décharge, dépend au contraire de la nature des éléments qui se

recombinent. La quantité d'électricité restituée pendant la durée du courant secondaire est égale à celle qu'il a fallu dépenser pour polariser les électrodes. Toute la théorie des *accumulateurs* est renfermée dans ce peu de mots.

Dans la décomposition des électrolytes complexes, les corps qui se dégagent aux électrodes sont ceux dont la libération exige le moins d'énergie; cette loi, dite *loi de Sprague,* est la réciproque de la loi du travail maximum formulée par M. Berthelot.

Des considérations analogues permettent de déduire la force électromotrice d'une pile donnée de la quantité de chaleur résultant de l'ensemble des réactions qui s'y développent.

Nous avons supposé jusqu'ici que les divers points des circuits considérés étaient maintenus à une même température, ce qui n'est pas le cas général : il nous reste donc à parler des phénomènes *thermo-électriques.*

Un circuit métallique fermé, constitué par des éléments hétérogènes, est traversé par un courant, dès que ses différents points sont à des températures différentes : c'est ainsi qu'on obtient des couples thermo-électriques en soudant entre eux divers métaux constituant un circuit fermé.

La force électromotrice d'un semblable couple dépend de la nature des métaux au contact; mais il est indifférent que ces métaux soient reliés directement ou par l'intermédiaire d'un conducteur quelconque. Les soudures de liaison n'ont donc aucune action.

Les forces thermo-électromotrices sont fonctions de la différence de température des soudures, et elles constituent un caractère spécifique pour chaque couple. Toutefois, on remarque que, si l'une des soudures est maintenue à une température constante et que l'on élève progressivement la température de l'autre soudure, la force électromotrice augmente généralement jusqu'à ce qu'elle atteigne un maximum; elle diminue ensuite jusqu'à zéro et change de signe. Cette interversion est une nouvelle caractéristique de la nature des métaux.

Pour un couple présentant une différence dt de température, on observe une différence dE de force électromotrice,

qui est égale à une certaine fonction de la température $\varphi(t)$ à laquelle Sir W. Thomson a donné le nom de *pouvoir thermo-électrique*. Le pouvoir thermo-électrique de deux métaux, à une température t, est égal à la différence des pouvoirs thermo-électriques de chacun d'eux par rapport à un troisième métal. On rapporte généralement les pouvoirs au plomb.

CHAPITRE IV.

ÉLECTROMAGNÉTISME ET ÉLECTRODYNAMIQUE.

Un courant électrique crée autour de lui un champ, dont l'existence se manifeste par des orientations d'aiguille aimantée, des fantômes magnétiques, etc., comme pour les champs magnétiques; la découverte est d'Œrsted, mais c'est Ampère qui a démontré que ces champs galvaniques sont de véritables champs magnétiques. Ils sont tout à fait de même nature; ce n'est point seulement entre eux une identité de forme, mais bien une identité absolue et essentielle de constitution : le milieu est modifié de la même façon dans les deux cas. C'est sur cette constatation que reposent les théories de l'électromagnétisme et de l'électrodynamique.

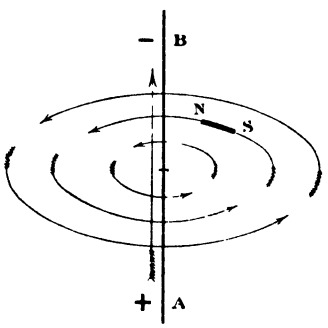
Une portion rectiligne de circuit, assez grande pour qu'on puisse l'assimiler à une droite indéfinie, produit un champ dont les lignes de force sont des cercles concentriques; l'axe du courant est leur centre commun (*fig.* 10) et les surfaces de niveau sont par suite des plans passant par l'axe. La force est la même en tous les points d'une même circonférence; un pôle nord, qui y serait placé, tendrait à tourner suivant les flèches tracées sur le dessin : pour un observateur, situé à l'extrémité positive du circuit en A, la direction du mouvement serait celle des aiguilles d'une montre. C'est la règle d'Ampère. Maxwell a formulé une autre règle mnémonique, plus suggestive encore : si l'on imagine que l'axe d'une vrille ou d'un tire-bouchon coïncide avec le fil, le sens de la rotation qu'il faut imprimer à l'instrument pour obtenir un déplacement longitudinal dans le sens du courant est celui de la rotation d'un pôle nord suivant les lignes de force. Le pôle

nord d'une aiguille oscillant librement se dirige dans ce même sens.

Si l'on s'éloigne du fil, on observe que la force varie en sens inverse de la simple distance au courant; cette loi porte le nom de Biot et Savart.

Le champ du courant est aussi défini par un potentiel, c'est-à-dire par une fonction dont les dérivées partielles par rapport aux axes des coordonnées représentent les compo-

Fig. 10.



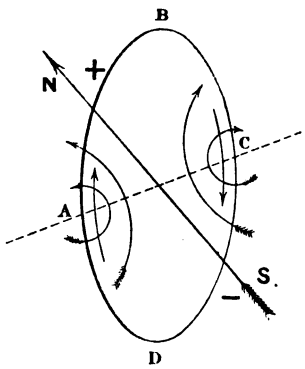
santes respectives de la force prises en sens contraire. Mais le potentiel du courant en un point n'est plus une simple fonction des coordonnées; en effet, pour un courant rectiligne indéfini, cette fonction a une infinité de valeurs différant les unes des autres d'un multiple de $4\pi\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}$ étant le travail correspondant à la rotation complète autour de l'axe du courant d'un pôle égal à l'unité.

Considérons maintenant un courant fermé ABCDA (*fig.* 11); au centre du courant, les lignes de force sont perpendiculaires au plan du circuit, et elles ont un sens tel qu'un observateur, regardant dans cette direction, verrait le courant circuler dans la direction des aiguilles d'une montre. Le potentiel en un point X quelconque est égal à ωI, produit de l'angle solide sous lequel on voit le contour, de ce point, multiplié par l'intensité du courant :

$$V = \omega I + C. \tag{28}$$

Le potentiel est positif du côté N, négatif du côté opposé; N est à la gauche de l'observateur couché dans le courant et regardant vers l'intérieur du contour fermé. On prend donc ω positif du côté N, négatif du côté S. Ce potentiel en un point

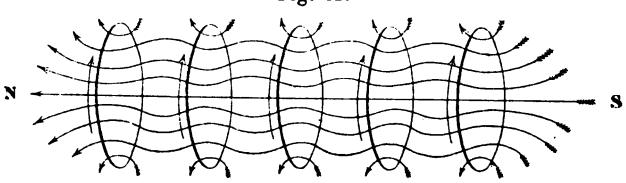
Fig. 11.



représente le travail nécessaire pour amener l'unité de pôle nord depuis l'infini jusqu'au point : mais la constante C varie suivant le nombre de fois que ladite masse aurait traversé le plan du circuit; il faut ajouter $4\pi I$ pour chaque traversée effectuée dans un sens contraire à la direction du champ.

Un solénoïde est constitué par une série de courants circulaires parallèles; les actions réciproques de ces courants modifient la direction des lignes de force et leur donnent la disposition indiquée par la *fig.* 12. On retrouve à ce solénoïde

Fig. 12.



une extrémité N positive et une autre S négative. Le flux de force qui s'échappe d'un courant circulaire a la direction des lignes de force; on le dit *positif* quand il suit cette direction,

en entrant par la face négative S; il serait dit *négatif* s'il pénétrait par la face positive N, en sens inverse de la direction des lignes de force. Ce flux est proportionnel à l'intensité H du champ, à l'étendue S de la surface et au cosinus de l'angle α que font les lignes de force avec la normale à la surface :

$$\varphi = HS \cos\alpha.$$

L'énergie d'un courant fermé dans un champ a pour expression

$$W = -I\varphi,$$

φ représentant le flux de force qui traverse le contour en pénétrant par la face négative.

Pour deux positions successives auxquelles correspondent des flux φ_1 et φ_2, l'accroissement d'énergie est $W_2 - W_1$; on a

$$(29) \qquad W_2 - W_1 = I(\varphi_1 - \varphi_2).$$

C'est ce travail qu'il a fallu dépenser pour lutter contre les forces du champ. On voit que tout changement de position qui diminue le flux de force pénétrant par la face négative correspond à un travail négatif; le travail serait positif, si le même flux augmentait. D'où ce théorème :

Le travail nécessaire pour déplacer un courant fermé dans un champ est égal au produit de l'intensité du courant par la variation du flux.

On dit aussi que *le travail est égal au produit de l'intensité du courant par le flux coupé par le contour du circuit* (1).

Les considérations précédentes permettent de prévoir ou d'expliquer tous les déplacements spontanés des courants dans un champ. Il suffit d'appliquer le théorème de Méca-

(1) Faraday employait un vocabulaire différent; une variation du flux était pour lui une variation du nombre de lignes de force; le flux coupé était un nombre de lignes de force coupées par le contour en mouvement. On emploie encore ces expressions.

nique en vertu duquel tout système abandonné à lui-même tend à dépenser toute son énergie; ses positions d'équilibre stable sont celles pour lesquelles l'énergie passe par un minimum. Un courant tendra donc toujours vers la position correspondant au maximum du flux coupé. Un courant rectiligne mobile dans un champ produit par un autre courant rectiligne se placera par conséquent parallèlement au premier; un courant fermé se tournera de façon à recevoir le maximum de flux par sa face négative; un courant à contour flexible prendra la forme circulaire, qui lui permet d'embrasser le maximum de flux. D'une façon plus générale encore, les mouvements spontanés sont tels que les flux de force se superposent en s'ajoutant.

L'orientation spontanée d'un contour fermé circulaire dans un champ a pour effet de placer l'axe d'un solénoïde parallèlement aux lignes de force du champ; ils s'orientent donc à la façon des aimants, pour lesquels on constate de même la tendance à la superposition des lignes de force. C'est ainsi que l'on arrive à l'identification des éléments de courant et des aimants.

Cette identification est due au génie d'Ampère.

Elle repose sur ce théorème, connu sous le nom de théorème d'Ampère : *L'action d'un courant fermé est identique à celle d'un feuillet magnétique de même contour et dont la puissance est égale numériquement à l'intensité du courant.* En effet, la puissance du feuillet $\mathcal{F}$ (égale au produit de son épaisseur ε par sa densité superficielle σ) est donnée par le nombre même qui exprime l'intensité électromagnétique du courant : $\mathcal{F} = \varepsilon\sigma = \mathrm{I}$.

Ce théorème nous oblige à assimiler un solénoïde à un système magnétique obtenu par la superposition d'un certain nombre de feuillets magnétiques de même surface, d'épaisseur égale à la distance e des spires du solénoïde et de densité superficielle $\sigma = \frac{\mathrm{I}}{e}$, I étant l'intensité du courant. Les surfaces en contact de tous ces feuillets s'annulent réciproquement, sauf les deux extrêmes, et l'action extérieure se réduit à celle de deux masses $+m$ et $-m$ placées sur les extrémités; si le solénoïde a une longueur $2l$ et s'il est formé

de n spires, on aura donc

$$(30) \qquad m = S\sigma = \frac{IS}{e} = \frac{nIS}{2l} = n_1 IS,$$

n_1 étant le nombre de spires par centimètre de longueur.

Le moment magnétique du solénoïde est dès lors connu :

$$\mathfrak{M} = 2ml = nIS = 2n_1 ISl.$$

Un solénoïde se comporte comme un aimant de moment $\mathfrak{M} = nIS$, dont le milieu et la direction d'axe coïncideraient avec le milieu et la direction d'axe du solénoïde. Le flux qui le traverse est $4\pi n_1 IS$. Le pôle nord coïncide avec la face positive du contour circulaire.

Du moment que les courants donnent naissance à un champ identique aux champs magnétiques, ils doivent aimanter le fer doux : on obtient ainsi des *électro-aimants*. Le champ produit par les électros est plus intense que ceux que donne un aimant permanent en acier, parce que l'acier est moins magnétique que le fer doux.

On calcule l'aimantation temporaire d'un fer doux, de susceptibilité $\varkappa$, par la formule $\varkappa H = 4\pi n_1 \varkappa I$. Elle dépend donc du nombre de spires par unité de longueur, mais elle est indépendante du périmètre d'une spire. On a dès lors intérêt à réduire ce périmètre au minimum et à enrouler directement le fil inducteur sur le barreau de fer, qui constitue le noyau de l'électro. Les pôles coïncident avec ceux du solénoïde.

Le flux d'induction est

$$(30\ bis) \qquad \varphi = \mathfrak{B}S = 4\pi n_1 I\mu S,$$

μ étant le coefficient de perméabilité du fer.

Ces indications sont utiles; toutefois la simplicité des formules ci-dessus n'est qu'apparente, car les paramètres $\varkappa$ et μ ne sont pas constants ainsi qu'il a été dit plus haut : en particulier, $\varkappa$ est une fonction complexe de H. Aussi a-t-on fréquemment recours à des équations empiriques, que l'on trouvera dans nos Tables du Livre II.

Il nous reste à décrire et à étudier un phénomène magné-

tique, découvert par M. Ewing, et dénommé par lui du nom d'*hystérésis* (ὑστερέω, je reste en arrière). Si l'on soumet un échantillon de fer à une force magnétique variable, de manière que l'induction prenne successivement toutes les valeurs depuis l'état neutre jusqu'à un maximum positif, pour revenir à l'état initial en passant par un maximum négatif, on constitue une sorte de cycle fermé et l'on constate qu'une certaine somme de travail a été consommée dans cette série d'opérations. Or M. Hopkins a démontré que ce travail, exprimé en ergs et rapporté à l'unité de volume, est égal au produit de la force coercitive de l'échantillon par l'induction maximum, divisé par π.

L'hystérésis s'exprime en ergs par centimètre cube; elle varie avec les valeurs maximum et minimum de l'induction; l'énergie absorbée se convertit en chaleur. Ainsi s'explique l'échauffement des barreaux soumis à des changements rapides d'aimantation.

Au lieu de la marche synthétique que nous venons de suivre, on eût pu procéder par voie d'analyse.

Partons, en effet, de la *loi de Laplace,* que ce savant a déduite des expériences de Biot et de Savart. Un conducteur rectiligne de longueur ds, traversé par un courant d'intensité I, exerce sur un pôle magnétique de quantité m, placé à une distance r, une force élémentaire df donnée par la formule

$$df = k\,\frac{m\,\mathrm{I}\,ds\sin\alpha}{r^2},$$

α étant l'angle formé par l'élément de courant ds avec la droite qui joint son milieu au pôle m; quant à k, c'est une constante dépendante du milieu à travers lequel s'exerce la force df; un choix convenable des unités pouvant faire k égal à 1, dans l'air, nous aurons

$$df = \frac{m\,\mathrm{I}\,ds\sin\alpha}{r^2}. \tag{31}$$

Il est bon de faire observer que cette force n'appartient pas à l'espèce des forces dites *centrales;* en effet, au lieu de

s'exercer suivant la droite reliant l'élément au pôle, elle s'exerce perpendiculairement au plan passant par le pôle et l'élément de courant : c'est le plan qu'Ampère appelait le *plan directeur*. Supposons le pôle m positif, c'est-à-dire nord : ce pôle sera poussé vers la gauche d'un observateur couché sur l'élément regardant le pôle et nageant, pour ainsi dire, dans le sens du courant, celui-ci lui entrant par les pieds.

En vertu de la réciprocité d'effets produite par l'égalité de l'action et de la réaction, la force exercée par le pôle sur l'élément aura la même valeur numérique, mais elle sera dirigée vers la droite de l'observateur.

Comme $\frac{m}{r^2}$ est l'intensité du champ produit par le pôle m, on écrit souvent

$$df = \mathrm{H}\mathrm{I}\, ds \sin\alpha; \tag{32}$$

on pourrait aussi écrire

$$d\mathrm{H} = \frac{df}{m} = \frac{\mathrm{I}\, ds \sin\alpha}{r^2}. \tag{32 bis}$$

Pour connaître la force exercée par un circuit de dimensions finies, il suffit d'intégrer les actions élémentaires produites par le circuit total. Voici un exemple de ce calcul : l'action d'un courant circulaire fermé, de rayon R, sur un pôle placé à une distance D du centre, sur la normale au cercle, menée par son centre, est égale à

$$\frac{\mathrm{I}\, 2\pi m \mathrm{R}^2}{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{D}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mathrm{I} m \mathrm{S}}{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{D}^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{33}$$

Le champ a en ce point une intensité

$$\frac{\mathrm{IS}}{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{D}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Abstraction faite des difficultés de calcul, on pourra résoudre de la même façon tous les problèmes, au moyen de l'équation de Laplace.

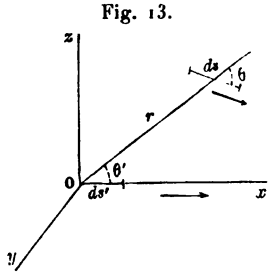
En partant de quelques principes établis sur l'observation

des faits, Ampère a trouvé de même une formule donnant l'action réciproque de deux éléments de circuit ds et ds', parcourus par des courants d'intensité connue. Deux éléments de longueur ds et ds', traversés par des courants d'intensité I et I' (en mêmes unités que ci-dessus, par conséquent en unités électromagnétiques), s'attirent ou se repoussent, suivant la ligne qui joint leurs centres avec une force égale à

$$(34) \qquad df = \frac{\mathrm{II}'\,ds\,ds'}{r^2}(2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta'),$$

r étant la distance des centres des éléments, ω l'angle qu'ils forment entre eux, θ et θ' les angles qu'ils forment l'un avec la droite joignant leurs milieux et l'autre avec son prolongement (*fig.* 13) [1]. En appliquant cette formule aux cas par-

Fig. 13.



ticuliers que l'on rencontre dans la pratique, on calcule sans peine l'action réciproque de deux courants de forme géométrique et de position donnée : ainsi l'action d'un courant rectiligne indéfini sur un courant de longueur l, placé parallèlement au premier, à une distance D, se trouve par la formule

$$(35) \qquad f = \frac{2\mathrm{II}'l}{\mathrm{D}}.$$

---

[1] La formule classique, connue de tous nos lecteurs, est

$$df = \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right);$$

mais, dans cette expression, les intensités i et i' sont évaluées en unités électrodynamiques (i) et non pas en unités électromagnétiques (I) : or $i^2 = 2\mathrm{I}^2$; voilà pourquoi nous avons dû multiplier II' par 2, pour établir la relation (34) en fonction des intensités électromagnétiques.

Si les courants sont croisés, le courant mobile sera sollicité par une force perpendiculaire à sa direction, égale à

$$f = 2\mathrm{II}'\left(\frac{l}{\mathrm{D}} - \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mathrm{D}^2}\sin\omega + \ldots\right),$$

ω étant l'angle des conducteurs; en remplaçant dans cette formule ω par $\frac{\pi}{2}$, on trouvera l'action de deux courants perpendiculaires,

$$f = 2\mathrm{II}'\left(\frac{l}{\mathrm{D}} - \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mathrm{D}^2}\right).$$

UNITÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Ce système d'unités est basé sur l'équation de Laplace

$$df = k\frac{m\mathrm{I}\,ds\sin\alpha}{r^2}.$$

Quand on l'applique à un courant circulaire agissant sur un pôle placé en son centre, on a, pour une longueur l de circuit et un rayon r du cercle,

$$f = k\frac{m\mathrm{I}\,l}{r^2},$$

d'où, en faisant $k = 1$,

$$\mathrm{I} = \frac{fr^2}{ml}.$$

L'intensité du courant sera égale à l'unité lorsque le circuit sera enroulé sous forme d'un arc de cercle, de 1^{cm} de rayon, qu'il aura 1^{cm} de longueur et qu'il exercera une force d'une dyne sur l'unité de pôle disposée en son centre.

Cette unité, dite *unité électromagnétique* C.G.S. *d'intensité* (nous écrirons U.E.M.), constitue la base du système.

Les cinq grandeurs principales à mesurer sont : l'*intensité* I, la *quantité* Q, la *résistance* R, la *force électromotrice* ou différence de potentiel E et la *capacité* C.

En joignant à l'équation de Laplace l'équation de Faraday

ou de Pouillet $Q = It$, celle de Joule $W = I^2Rt$, celle d'Ohm $E = IR$ et l'équation de définition des capacités $Q = CE$, nous obtenons un système de cinq équations qui détermine chaque unité en fonction des autres.

Intensité. — Nous avons exposé ci-dessus son concept fondamental.

$$\text{Dimension : } I = \frac{LMT^{-2}L^2}{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}L} = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

On peut arriver différemment à cette équation de dimension, en observant que l'action d'un courant fermé est égale à celle d'un feuillet de même contour; l'intensité aura donc la dimension de la puissance $\mathcal{F}$ d'un feuillet, ce qui se vérifie.

Quantité. — Elle est proportionnelle à l'intensité du courant et à sa durée : l'unité est la quantité transportée par le courant unité dans une seconde.

$$\text{Dimension : } Q = It = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}T = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}.$$

Résistance. — L'énergie dépensée pour faire circuler un courant d'intensité I dans un conducteur de résistance R durant le temps t apparaît sous forme de chaleur et elle peut servir à définir R, en faisant $W = I = t = 1$.

$$\text{Dimension : } R = \frac{W}{I^2t} = \frac{L^2MT^{-2}}{LMT^{-2}T} = LT^{-1}.$$

C'est une vitesse; cette concordance est mnémonique, nous n'y voyons pas autre chose.

Force électromotrice. — L'unité de force électromotrice fera naître un courant égal à l'unité dans un conducteur ayant l'unité de résistance.

$$\text{Dimension : } E = IR = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.LT^{-1} = L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}.$$

Flux de force : $\varphi = HS$; cette unité est la même que celle

qui a été définie dans le système magnétique : sa dimension est $L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}$.

Capacité. — Un condensateur, possédant l'unité de capacité, pourra recevoir l'unité de quantité sous une différence de potentiel égale à l'unité de force électromotrice.

$$\text{Dimension : } C = \frac{Q}{E} = \frac{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}} = L^{-1}T^{2}.$$

A ces unités, il y a lieu de joindre la suivante :

Densité de courant. — Elle est définie par le quotient de l'intensité de courant par la section du conducteur.

L'intensité d'un champ galvanique a évidemment les dimensions d'un champ magnétique.

UNITÉS PRATIQUES.

Les unités que nous venons de définir ne se trouvent pas en bonne proportion avec les grandeurs que l'on a à mesurer dans la pratique. Ainsi M. Joubert a calculé que l'unité U.E.M. de résistance serait équivalente à celle d'un fil de cuivre de 1^{mm} de diamètre dont on prendrait une longueur de $\frac{1}{20000}$ de millimètre; par contre, l'unité U.E.M. de capacité serait celle d'une sphère dont le rayon aurait un million de rayons terrestres.

Ces unités n'auraient pu convenir aux praticiens, car elles auraient présenté les inconvénients que les Portugais reprochent à leur unité de monnaie, le réis, dont il faut compter mille pour faire une somme de $5^{fr},60$; l'unité de capacité eût été aussi désagréable que le serait le myriamètre pour coter un dessin d'horlogerie. Bref, on s'est vu obligé de prendre des multiples des unités trop petites et des sous-multiples de celles qui étaient trop grandes.

Ces multiples devaient être décimaux.

De plus, il fallait conserver la cohérence du système; ainsi il fallait que l'unité de force électromotrice donnât l'unité d'intensité dans l'unité de résistance.

On a satisfait à toutes ces conditions, en prenant une unité de longueur égale à 10^9 centimètres et une unité de masse égale à 10^{-11} masses du gramme. Tout le monde connaît ce système, dont nous n'avons voulu que rappeler la genèse et les relations.

Pour faciliter enfin l'usage du système, on a donné des noms courts, faciles à retenir, à prononcer et à écrire aux unités adoptées. Le Tableau ci-dessus résume tout ce qu'il faut retenir.

Unités.	Noms.	Valeur.
Intensité	Ampère	10^{-1} U.E.M.
Quantité	Coulomb	10^{-1}
Résistance	Ohm	10^9
Force électromotrice	Volt	10^8
Capacité	Farad	10^{-9}

Ce système est cohérent comme le premier. Un ampère transporte un coulomb par seconde; un volt produit un ampère dans une résistance d'un ohm; un farad, chargé au potentiel d'un volt, contient un coulomb et se décharge en une seconde à travers un ohm.

On a rendu le système plus maniable encore en adjoignant les préfixes *milli* $\left(\frac{1}{1000}\right)$, *méga* ($10^6$) et *micro* $\left(\frac{1}{10^6}\right)$; ainsi le milliampère vaut $\frac{1}{1000}$ d'ampère, le mégohm, un million d'ohms et le microfarad un millionième de farad.

L'unité de travail électrique dans ce système pratique est le travail développé par un coulomb tombant du niveau d'un volt; on l'appelle un *joule*.

1 joule	1 volt × 1 coulomb
1 kilogrammètre	9,81 joules
1 joule	0,1019 kilogrammètre

D'une manière générale, il suffit de diviser le produit des volts par les coulombs par 9,81 pour avoir en kilogrammètres l'expression du travail électrique.

L'unité de puissance correspond à l'unité de travail par seconde : c'est l'énergie développée par une force électromo-

trice d'un volt pour maintenir un courant d'un ampère. On l'appelle *watt*.

1 watt.....	1 volt × 1 ampère
1 kilowatt.....	1000 watts
1 kilowatt.....	1,36 cheval-vapeur de 75^{kgm} par seconde
	1,34 HP
1 cheval-vapeur....	736 watts
1 HP (horse-power).	746 watts

Il est utile de se familiariser avec les considérations suivantes :

1 cheval-heure.....	$270000^{kgm} = 2648700$ joules
	736 watt-heures
1 ampère-heure.....	3600 coulombs
1 watt-heure.....	3600 joules $= 367^{kgm}$

Concordance des unités électrostatiques, électromagnétiques et pratiques

$$v = 3 \times 10^{10}.$$

U. pratiques.	U.E.M.	U.E.S.
Ohm.....	10^9	$\frac{10^9}{v^2} = \frac{1}{3^2.10^{11}}$
Volt.....	10^8	$\frac{10^8}{v} = \frac{1}{3.10^2}$
Ampère.....	10^{-1}	$10^{-1}v = 3.10^9$
Coulomb.....	10^{-1}	$10^{-1}v = 3.10^9$
Farad.....	10^{-9}	$10^{-9}v^2 = 3^2.10^{11}$

U.E.S.	U.E.M.	U. pratiques.
Résistance.....	v^2	$3^2.10^{11}$ ohms
Diff. de potentiel.....	v	3.10^2 volts
Intensité.....	$\frac{1}{v}$	$\frac{1}{3.10^9}$ ampères
Quantité.....	$\frac{1}{v}$	$\frac{1}{3.10^9}$ coulombs
Capacité.....	$\frac{1}{v^2}$	$\frac{1}{9.10^{11}}$ farads $\frac{1}{9.10^5}$ microfarads

CHAPITRE V.

INDUCTION.

Tout déplacement d'un conducteur fermé dans un champ, toute variation dans l'intensité du champ et, en général, toute variation du flux de force, embrassé par un circuit, y développe un courant induit : ce courant est temporaire et il dure ce que dure la variation du flux; mais la quantité totale d'électricité induite ne dépend nullement, ni de la durée, ni de la loi de la variation.

Cet énoncé définit les conditions dans lesquelles naissent les courants induits; la *loi de Lenz* détermine leur sens : tout déplacement d'un circuit fermé dans un champ produit un courant induit dont l'action magnétique tend à s'opposer au mouvement. On peut dire encore que le sens du courant dû à la variation du flux est tel qu'il s'oppose à la variation. Si donc le flux vient à augmenter, le courant induit sera inverse de celui qui aurait fait augmenter ce flux; si le flux diminue, le courant induit s'opposera à cette diminution et il sera de même sens que celui qui produit le flux. Le courant induit change par conséquent de signe au moment même où la variation change de signe; en d'autres termes, le courant induit change de signe au moment où le flux traverse un maximum ou un minimum.

Toute la théorie de l'induction est résumée dans le peu de mots qui précèdent.

Sir W. Thomson et M. Helmholtz ont établi la théorie analytique des phénomènes d'induction en la déduisant du principe de la conservation de l'énergie. Ils ont démontré que la force électromotrice d'induction est, à chaque instant, égale à la dérivée changée de signe $-\frac{d\varphi}{dt}$ du flux de force magné-

tique traversant le circuit par rapport au temps :

$$E = -\frac{d\varphi}{dt}. \tag{36}$$

La quantité d'électricité induite dq est donnée par l'équation

$$I = \frac{E}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dq}{dt},$$

dans laquelle R est la résistance du circuit; on en déduit

$$dq = -\frac{d\varphi}{R}, \tag{37}$$

et

$$[q]_1^2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$

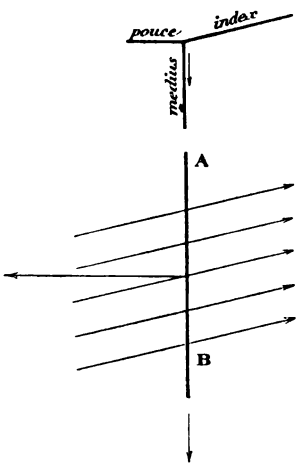
Ce résultat s'énonce ainsi qu'il suit : la quantité d'électricité induite est égale au quotient de la variation correspondante $\varphi_1 - \varphi_2$ du flux de force par la résistance R du circuit; la force électromotrice induite est égale à $\varphi_1 - \varphi_2$.

Le sens de la force électromotrice induite est indiqué par ces formules, si l'on convient de prendre comme sens positif celui de la rotation du tire-bouchon de Maxwell avançant dans la direction du champ. Quand le flux diminue, $-\frac{d\varphi}{dt}$ augmente et la force électromotrice est positive. Un exemple fera mieux saisir la chose. Introduisons un aimant dans une bobine par le pôle nord du barreau; le flux augmente et la force électromotrice induite sera négative; retirons-le, le flux diminue et la force électromotrice devient positive.

Pour mieux définir le sens des courants induits, on a formulé des règles mnémoniques qu'il importe de bien connaître. Supposons un observateur couché dans le sens des lignes de force du champ et imaginons un déplacement quelconque d'un conducteur dans ce champ. Si l'observateur regarde dans la direction de ce déplacement, le courant induit ira de sa gauche à sa droite; si le courant n'était pas fermé, le potentiel le plus élevé serait à sa gauche.

M. Jenkin a donné une règle plus suggestive : étendez les trois premiers doigts de la main droite, de sorte que le pouce, l'index et le médius dessinent dans l'espace trois droites perpendiculaires, le pouce et l'index dans un plan, le médius étant normal à ce plan. Placez l'index dans le sens des lignes de force, le pouce dans le sens du déplacement, et le médius dans la direction du conducteur; ce doigt marquera le sens du courant induit, qui sortira par son extrémité (*fig.* 14).

Fig. 14.



Appliquons nos règles à un cas simple, celui de la translation d'un conducteur AB, restant parallèle à lui-même, et se déplaçant dans un champ uniforme d'intensité H, perpendiculairement à la direction du champ; le courant ira de A en B. S'il a une vitesse v, une longueur l, la différence de potentiel entre A et B sera égale à

$$E = H l v. \tag{38}$$

Si le conducteur avait coupé les lignes de force sous un angle α et si la direction du mouvement avait fait un angle φ avec la direction du champ, on aurait eu

$$E = H l v \sin\alpha \cos\varphi. \tag{39}$$

Pour $\alpha = 90^\circ$ et $\varphi = 0$, nous retrouvons la formule (38). Le second membre des deux équations exprime la variation du flux; c'est le flux de force coupé par le déplacement dans l'unité de temps; on dit quelquefois encore que c'est le nombre de lignes de forces coupées dans l'unité de temps.

Le travail dépensé pour produire ce déplacement du conducteur est égal à $\frac{E^2}{R} t$:

$$W = \frac{H^2 l^2 v^2 \sin^2\alpha \cos^2\varphi\, t}{R}. \tag{40}$$

On retrouve, sous forme de chaleur, dans le circuit traversé par le courant induit, le travail dépensé. Cette conséquence s'impose en vertu du principe même de la conservation de l'énergie.

Il importe de définir d'une manière complète ce qu'est le flux, coupé par le circuit. Ce flux peut en effet être décomposé en deux parties : l'une due au champ inducteur, l'autre produite par le courant lui-même développé par induction dans l'induit. Ceci nous amène à parler de l'auto-induction ou *self-induction* d'un circuit, qui est la cause des *extra-courants* observés déjà par Faraday et étudiés par lui.

Du moment qu'un circuit est traversé par un courant, il se produit un champ et par suite un flux de force, aussi bien quand le courant est induit que lorsqu'il est inducteur. Voilà comment il y a self-induction.

On appelle *coefficient de self-induction* d'un circuit le flux créé par lui-même et qui le traverse, lorsque le courant est égal à l'unité : on l'écrit L_s. La valeur de L_s ne dépend pas seulement de la forme du circuit, mais encore du milieu dans lequel il est plongé, car le flux créé varie avec la perméabilité de ce milieu : ainsi un noyau de fer ou une enveloppe de fer augmente le flux et augmente par conséquent L_s.

On calcule aisément L_s quand il s'agit d'un milieu, tel que l'air, dont la perméabilité est constante et égale à 1, car alors L_s est constant; mais L_s n'est plus constant et il varie avec I, l'intensité du courant, au voisinage des corps magnétiques. Dans ce dernier cas, les calculs cessent d'être rigoureux et ils deviennent excessivement difficiles.

On voit sans peine que

$$L_s = \frac{\varphi}{I} = \frac{HS}{I} = \frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}}{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}} = L;$$

c'est le quotient d'un flux par une intensité de courant. L'unité C.G.S. de coefficient de self-induction est la valeur de L_s pour un circuit, qui, traversé par l'unité de courant, produit un flux d'induction égal à l'unité de flux de force. L'unité U.E.M. du coefficient de self-induction est le centimètre; l'unité pratique est le *quadrant*, égal à 10^9 centimètres.

Le flux total produit par un circuit isolé, parcouru par un courant I constant, est

$$\varphi = L_s I. \tag{41}$$

Si le courant varie, il naît une force électromotrice de self induction égale à

$$-\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d(L_s I)}{dt};$$

mais, si L_s est constant, on peut écrire

$$= -L_s \frac{dI}{dt}.$$

Quand le courant augmente d'intensité, dI est positif et la force électromotrice induite est négative, d'où un extracourant inverse. Il serait direct si dI était négatif.

Les effets de self-induction sont encore plus marqués au moment de la fermeture ou de la rupture du circuit; dans ce cas, ces effets règlent l'intensité aux divers instants de la période variable et l'on peut calculer l'intensité I_t au bout d'un temps t. Si l'on appelle I_0 l'intensité que devrait avoir le courant en vertu de la force électromotrice E $\left(I_0 = \frac{E}{R}\right)$, on pourra écrire

$$I_t = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L_s}t}\right). \tag{42}$$

I_t est l'intensité du courant après un temps t de fermeture du

circuit; (1) la quantité totale d'électricité qui lui correspond est

$$(43) \qquad \int_0^\infty I\,dt = I_0 \int_0^\infty e^{-\frac{R}{L_s}t}\,dt = \frac{I_0 L_s}{R} = \frac{E}{R^2} L_s.$$

Elle est la même que si le courant avait eu une intensité moitié moindre que la valeur normale I_0 pendant le temps $\frac{2L_s}{R}$.

Pour les courants de rupture, on peut appliquer la même formule que ci-dessus, en observant toutefois que c'est l'extra-courant de rupture qui persiste seul après que le circuit a été coupé; on a donc

$$I_t = I_0 e^{-\frac{R}{L_s}t}.$$

Le rapport $\frac{L_s}{R}$ de la formule (43) s'appelle la *constante de temps* du circuit; le régime permanent s'établit d'autant plus vite que cette constante a une valeur moindre.

L'effet de self-induction semble augmenter la résistance du circuit, mais ce n'est qu'une apparence. On dirait une sorte de retard à la transmission de la force électromotrice : c'est le résultat prévu de l'induction. On s'en rend compte aisément en se rappelant que l'établissement d'un courant dans un circuit coûte un certain travail et qu'il faut nécessairement, pour y suffire, qu'une certaine quantité d'énergie soit absorbée au début du courant; elle sera restituée au moment de la rupture du circuit. L'énergie absorbée et restituée a une valeur égale à

$$(44) \qquad W = L_s \frac{I^2}{2}.$$

Il est presque impossible de réaliser un circuit sans self-induction; toutefois on n'est pas loin de cette condition quand on emploie des bobines à double fil replié sur lui-même, car le flux de force est alors théoriquement nul (2).

---

(1) Le terme soustractif $I_0 e^{-\frac{R}{L_s}t}$ représente l'intensité du courant de self-induction au temps t.

(2) D'après MM. Mascart et Joubert, la plus petite valeur que l'on puisse

Quand deux circuits sont en présence, il y a lieu d'étudier leur influence réciproque; chacun d'eux se trouve dans le champ de l'autre et sous l'influence de l'autre. Le flux de force émanant d'un contour traverse l'autre réciproquement. On appelle *coefficient d'induction mutuelle* des circuits le flux qui traverse leur contour lorsque l'intensité du courant est égale à l'unité : nous l'écrirons L_m. Ce coefficient étant connu, on peut calculer la force électromotrice induite dans un des circuits par l'influence du circuit voisin, par la formule

$$(45) \qquad E = L_m \frac{dI}{dt}.$$

Les deux coefficients L_s et L_m jouent un rôle considérable dans les calculs auxquels donnent lieu les phénomènes d'induction : il nous reste à faire voir comment on peut déterminer leur valeur dans quelques cas simples.

Considérons un solénoïde circulaire cylindrique, de n_1 spires par unité de longueur, ayant une surface S; nous le supposerons assez long pour qu'on puisse, dans une partie notable de sa longueur, négliger l'action de ses extrémités : soit I l'intensité du courant. Le flux de force est égal à $4\pi n_1 IS$; si l'on enroule sur ce cylindre n'_1 spires nouvelles, d'un diamètre quelconque, le flux de force du solénoïde proposé traverse n'_1 fois la surface du second et le coefficient d'induction mutuelle L_m est égal à

$$(46) \qquad L_m = 4\pi n_1 n'_1 IS;$$

le même flux traverse n_1 fois la surface du premier circuit et le coefficient de self-induction du solénoïde est égal à

$$(47) \qquad L_s = 4\pi n_1^2 S.$$

La présence d'un noyau de fer à l'intérieur d'une bobine augmente la valeur des coefficients d'induction. Si l'on admet que l'aimantation soit proportionnelle à la force magnétisante,

---

obtenir pour deux fils parallèles, de longueur l, de même diamètre, maintenus en contact, est donnée par la formule $L_s = 3,773\,l$. On aurait une valeur moindre pour des lames minces disposées parallèlement.

l'induction magnétique dans l'espace occupé par le fer doux est égale à sa valeur primitive multipliée par $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$; on écrira donc

$$(48) \qquad L_m = 4\pi n_1 (n'_1 S + 4\pi^2 \varkappa r^2),$$

r étant le rayon du noyau de fer doux.

Mais le calcul ne donne que des résultats contestables pour des bobines enroulées à la façon ordinaire : il faudrait que le fil fût logé dans des gorges creusées au tour. Aussi ne calcule-t-on pas les valeurs de L_s : on préfère les mesurer expérimentalement; il existe pour cela plusieurs méthodes. Maxwell déterminait à cet effet la quantité d'électricité mise en mouvement par l'extra-courant de rupture; M. Joubert observe des courants alternatifs sinusoïdaux par l'électromètre à quadrants; enfin M. Ledeboër a utilisé le pont de Wheatstone. On constate que l'introduction d'un noyau de fer peut décupler la valeur du coefficient de self-induction d'une bobine.

Parmi les applications les plus heureuses de l'induction, il faut citer en première ligne les générateurs mécaniques d'électricité.

Le mouvement relatif d'un conducteur fermé dans un champ donne lieu à la production d'une force électromotrice d'induction, qui est le prix d'une dépense équivalente d'énergie. La multiplicité des dispositifs que l'on peut employer pour réaliser cet effet donne lieu à une grande variété de types de machines : elles sont *magnétos* ou *dynamos*, suivant que l'inducteur est constitué par un aimant permanent ou un électro-aimant; elles sont à courants *alternatifs, ondulatoires* ou *continus* par redressement, suivant la forme de l'induit et de ses accessoires; on les dit à *excitation séparée* ou bien *auto-excitatrices* (*série, shunt ou compound*), selon le mode employé pour exciter, créer et conserver le champ, etc. Dans le premier cas, l'électro reçoit le courant total de la machine; dans le second, l'excitation est opérée par une dérivation seulement; dans le troisième, on combine ces deux modes d'excitation,

c'est-à-dire qu'on fait deux enroulements sur le noyau de l'électro, l'un étant parcouru par le courant total, l'autre par un courant dérivé. Quand le circuit dérivé est en communication avec les deux extrémités de l'induit, on a un montage *en courte dérivation;* il est en *longue dérivation* lorsqu'il communique avec les extrémités du circuit extérieur.

Quel que soit le mode d'induction, la force électromotrice induite est toujours donnée par la formule

$$E = H l v \sin\alpha \cos\varphi;$$

on fait l'intégration des forces électromotrices élémentaires pour les différents éléments de la machine. Le plus souvent α est égal à $\frac{\pi}{2}$ et φ à zéro et alors on a simplement $E = H l v$. La réaction mécanique f entre le conducteur mobile et le champ est, pour un courant I traversant le conducteur, $f = H l I$, et le travail $\mathfrak{T} = f v = H l v I = EI$. Le travail électrique EI est produit par le travail mécanique $H l v I$.

Souvent il y a avantage à considérer le flux coupé dans l'unité de temps : alors $\mathfrak{T} = I(\varphi_1 - \varphi_2)$.

On peut encore exprimer E en fonction de la vitesse de l'induit et de l'intensité du courant :

$$E = n\psi(I).$$

La fonction $\psi(I)$ dépend du mode de construction du générateur et de son fonctionnement; n est le nombre de tours par seconde. La fonction ψ est la *fonction caractéristique* de M. Marcel Deprez; on a, en appelant r et x les résistances intérieure et extérieure,

$$\psi(I) = \frac{E}{n} = \frac{I(r+x)}{n}.$$

La courbe qui représente $\psi(I)$ est dite la *caractéristique;* on l'obtient en portant les E en ordonnée et les I en abscisse.

La caractéristique d'une génératrice est l'analogue du diagramme d'une machine à vapeur et elle rend les mêmes services; elle supplée aux expressions analytiques simples que les savants n'ont encore pu découvrir pour représenter les

phénomènes dont ces appareils sont le siège. Les caractéristiques méritent toute l'attention des physiciens : elles permettent de déterminer à tout moment la force électromotrice de la génératrice, par les résistances et l'intensité du courant produit.

Il y a lieu de distinguer entre la *caractéristique totale* d'une série dynamo et la *caractéristique externe :* la première a pour ordonnée la force électromotrice totale, tandis que les ordonnées de la seconde ne sont que les différences de potentiel entre les bornes.

Le rendement des générateurs doit être défini, parce que ce mot a été pris dans des acceptions fort diverses.

Appelons : $\mathcal{P}m$ la puissance motrice fournie à la machine électrique;

$\mathcal{P}e$ la puissance électrique totale développée;

$\mathcal{P}\varepsilon$ la puissance électrique disponible, qu'on peut utiliser.

$$(49)\quad \begin{cases} \text{Le rendement } \textit{théorique} \text{ est} \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\mathcal{P}e}{\mathcal{P}m}; \\ \text{Le rendement } \textit{électrique} \text{ est} \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\mathcal{P}\varepsilon}{\mathcal{P}e}; \\ \text{Le rendement } \textit{industriel} \text{ est} \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\mathcal{P}\varepsilon}{\mathcal{P}m}. \end{cases}$$

Il importe de remarquer que la différence $\mathcal{P}m - \mathcal{P}e$ représente les pertes dues au frottement, aux courants parasites, à l'hystérésis, etc.; par contre, $\mathcal{P}e - \mathcal{P}\varepsilon$ correspond aux pertes produites par la résistance des circuits intérieurs de la machine. On peut calculer le rendement électrique, quand on connaît les résistances des divers circuits et le mode d'excitation.

Dans les transmissions d'énergie à distance, le rendement réel est le rapport de la puissance mécanique dépensée au point de départ sur l'arbre de la génératrice à la puissance disponible au point d'arrivée sur l'arbre de la réceptrice.

On appelle *moteur électrique* tout appareil capable de transformer l'énergie électrique en énergie mécanique. Les générateurs que nous venons d'étudier peuvent devenir des moteurs parce qu'ils sont réversibles; ils se mettront en mou-

vement dès qu'un courant, fourni par une source, traversera leur induit en développant une force contre-électromotrice, qui viendra en décompte de celle de la source.

Le travail utile d'un moteur est maximum lorsque sa force contre-électromotrice est égale à la moitié de la force électromotrice de la génératrice; cela revient à dire que l'intensité du courant en marche est la moitié de ce qu'était cette intensité alors que le moteur était au repos. Cette loi est connue sous le nom de *loi de Jacobi.*

Le rendement électrique d'une transformation d'énergie, faite dans ces conditions, est égal au rapport de la force contre-électromotrice e de la réceptrice à la force électromotrice E de la génératrice. Ce rendement peut devenir égal à l'unité lorsque e devient égal à E; mais alors le travail produit tombe à zéro. C'est la *loi de Siemens.*

La puissance du courant est toujours mesurée par le produit EI; mais on peut garder la même puissance en faisant varier simultanément les forces électromotrices et les intensités de telle sorte que $\frac{E}{E'} = \frac{I'}{I}$. Il y a souvent intérêt à modifier ainsi les conditions d'une transmission d'énergie pour mieux l'utiliser. Par exemple, les hauts voltages, fort économiques pour la transmission à distance, se prêtent moins bien à la distribution et aux applications : on a donc intérêt à réduire la tension pour augmenter la quantité avant de distribuer l'énergie. On n'aura évidemment pas rigoureusement $EI = E'I'$, car toute transformation se paye, mais on trouvera $EI = KE'I'$. Ce facteur K est le coefficient de transformation; il varie de 0,85 à 0,95.

Les transformateurs sont de différentes espèces. La plupart d'entre eux reçoivent et transforment des courants alternatifs ou interrompus : la bobine de Ruhmkorff en est un type classique. Cet appareil élève le voltage et abaisse la quantité; par contre, dans l'industrie, on cherche plus souvent à abaisser le voltage et à augmenter la quantité : ce double effet dépend de la relation établie entre l'inducteur et l'induit.

Mais il existe aussi des transformateurs à courants continus : ce ne sont plus alors des appareils dans lesquels on utilise directement l'induction. Ainsi un accumulateur Planté

est un transformateur *différé,* car on peut augmenter à volonté, par le couplage, un des facteurs E ou I aux dépens de l'autre et dépenser, en un temps moitié moindre, l'énergie fournie pendant un temps déterminé par une source. On peut aussi transformer l'énergie électrique par l'intermédiaire de dynamos réceptrices et génératrices, mais, dans ce cas, le coefficient K prend une valeur très faible et ce mode de transformation cesse d'être recommandable.

LIVRE II.

LES CONSTANTES NUMÉRIQUES.

CONSTANTES PHYSIQUES ET CHIMIQUES.

	Équivalent.	Poids spécifique.	Chaleur spécifique.	Température de fusion.	Chaleur de fusion.
Aluminium	13,75	2,6	0,2143	600°	
Argent	107,93	10,5	0,0570	945	21,7
Bismuth	210	9,8	0,0308	265	12,6
Charbon (de cornue)	6	1,9	0,2415		
Cuivre	31,75	8,9	0,0952	1054	
Étain	118	7,3	0,0562	235	14,2
Fer	28	7,8	0,1138	1550	60,0
Magnésium	12	1,7	0,2500	1040	
Manganèse	27,6	8,0	0,1217	au-dessus de 1650	
Nickel	29,5	8,7	0,1092	au-dessus de 1600	
Or	196,2	19,3	0,0324	1205	
Platine	98,5	21,4	0,0325	1775	27,2
Plomb	103,46	11,3	0,0314	325	5,4
Sélénium	39,5	4,3	0,0762	217	
Sodium	23,05	0,97	0,2934	90	
Soufre	16,04	2,0	0,1776	114	9,4
Zinc	32,5	7,2	0,0956	431	28,1
Laiton		7,8 à 8,5	0,0939	1015	
Bronze		8,4 à 9,3	0,0862	900	
Maillechort		8,4			
Bronze d'aluminium		7,7			
Paraffine		0,9		38,5	
Caoutchouc		1,2		120	
Gutta-percha		0,98		130	
Ébonite		1,15			

	Poids spécifique.	Chaleur spécifique.	Température d'ébullition.	Chaleur de vaporisation.
			°	
Mercure	13,596	0,0319	357,25	2,82
Sulfure de carbone	1,293	0,2352	46,20	86,67
Alcool	0,809	0,5475	78,26	202,4
Éther	0,716	0,5290	34,97	90,45
Benzine	0,890	0,4360	80,36	
Huile d'olives	0,915			

	Poids spécifique (litre-gramme).	Chaleur spécifique.	Coefficient de dilatation à volume constant.	Coefficient de dilatation à pression constante.
Hydrogène	0,0896	3,4090	0,003667	0,003661
Oxygène	1,433	0,2175		
Azote	1,254	0,2438	0,003668	
Ammoniaque	0,761	0,5084		
Acide carbonique	1,977	0,2163	0,003688	0,003710
Air	1,293	0,2375	0,003665	0,003670

Chaleur de combustion du gaz d'éclairage (*Witz*).

Par mètre cube à 0° et 760^{mm}..... 5250 calories

CONSTANTES D'AIMANTATION.

1° *Fer doux* (*Shelford Bidwell*).

Intensité du champ H.	Intensité d'aimantation $\mathfrak{I}$.	Susceptibilité $\varkappa$.	Perméabilité μ.	Induction $\mathfrak{B}$.
3,9	587	151,0	1899,1	7390
5,7	735	128,9	1621,3	9240
10,3	918	89,1	1121,4	11550
17,7	1083	61,2	770,2	13630
22,2	1147	51,7	650,9	14450
30,2	1197	39,7	500,0	15100
40,0	1226	30,7	386,4	15460
78,0	1337	17,1	216,5	16880
115,0	1370	11,9	150,7	17330
145,0	1403	9,7	122,6	17770
208,0	1452	7,0	88,8	18470

Intensité du champ H.	Intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$.	Susceptibilité $\varkappa$.	Perméabilité μ.	Induction $\mathfrak{B}$.
293,0	1474	5,0	64,2	18820
362,0	1489	4,1	52,7	19080
427,0	1504	3,5	45,3	19330
465,0	1508	3,2	41,8	19470
503,0	1510	3,0	38,7	19480
557,0	1517	2,1	35,2	19630
585,0	1530	1,6	33,9	19820

2° *Fer de Suède* (*Ewing*).

6690	1692,6	4,18	27960
8900	1657,5	3,34	29730
9510	1695,7	3,24	30820
10000	1687,8	3,12	31210
10360	1692,6	3,05	31630
10810	1663,9	2,93	31720
10880	1685,4	2,93	32060
11200	1683,8	2,89	32360

3° *Fonte de fer* (*Ewing*).

3900	1254,1	5,04	19668
6400	1235,8	3,43	21930
7710	1203,2	2,96	22830
8080	1228,6	2,91	23520
9210	1223,1	2,67	24580
9700	1209,5	2,57	24900
10610	1192,8	2,41	25600

4° *Acier Bessemer* (*Rowland*).

0,1695	192	33
1,174	325	383
2,433	630	894
3,445	1154	3996
5,586	1271	9138
14,30	832	11955
48,73	314	15370

Hystérésis (*Hopkinson*).

	ℬ.	Énergie absorbée par centimètre cube.
Fer forgé recuit	18251	13356
Fonte grise	10783	13037
Fonte malléable	3524	34740
Acier chromé trempé	13960	169455
Acier doux Bessemer	18196	17140

Constantes magnétiques des noyaux d'électro-aimants inducteurs, adoptées par MM. Mather et Platt, de Manchester (*Eric Gérard*).

	Fer forgé recuit			Fonte grise	
H.	ℬ.	μ.	H.	ℬ.	μ.
2	5000	3000	5	4000	800
4	9000	2250	10,5	5000	500
5	10000	2000	21,5	6000	279
6,5	11000	1692	42	7000	133
8,5	12000	1412	80	8000	100
12	13000	1083	127	9000	71
17	14000	823	188	10000	53
28,5	15000	526	292	11000	37
52	16000	308			
105	17000	161			
200	18000	90			
350	19000	54			

Intensités d'aimantation correspondantes à la saturation.

Fer doux	1800
Fonte	1250
Acier trempé dur	800
Nickel	500

POUVOIR ROTATOIRE MAGNÉTIQUE.

Constante de Verdet (d'après Becquerel).

	Rotation (raie D) (par unité de diff. de pot.).
Sulfure de carbone à 0°.	0,04341
» à t^0.....	$0,04341(1-0,00104t-0,000014t^2)$
Soufre fondu (114°)...	0,0803
Verre (crown).....	0,0203
» (flint).....	0,0325
Flint lourd.....	0,0647
Blende.....	0,2234

VALEURS ABSOLUES DES ÉLÉMENTS MAGNÉTIQUES TERRESTRES, *le* 1er *janvier* 1892 (*Th. Moureaux*).

	Déclin. occidentale.	Inclinaison.	Compos. horizontale.
Albi.....	14°.48'	61°.24'	0,2165
Amiens.....	15.55	66. 2	0,1899
Avignon.....	13.47	61. 0	0,2177
Belfort.....	13.24	63.49	0,2030
Bordeaux.....	16. 8	62.34	0,2103
Chambéry.....	13.30	62.15	0,2117
La Rochelle.....	16.38	63.43	0,2039
Lille.....	15.25	66.23	0,1887
Lyon.....	14. 0	62.30	0,2099
Marseille.....	13.25	60.20	0,2216
Nancy.....	13.46	64.50	0,1975
Paris.....	15.35	65.10	0,1955
Perpignan.....	14.18	60.14	0,2225
Rouen.....	16.18	65.55	0,1918
Toulouse.....	15. 4	61.16	0,2168
Bâle.....	13. 0	63.41	0,2038
Bruxelles.....	14.56	66.28	0,1882
Colmar.....	13. 6	64. 5	0,2017
Liège.....	14.14	66.12	0,1897
Rome.....	10.41	58. 5	0,2339
Strasbourg.....	12.56	64.21	0,200
Utrecht.....	14.36	67.12	0,1835
Valence (Espagne).....	15. 1	57.41	0,2353

Variation moyenne annuelle de la déclinaison à Paris.....		$-7',4$
»	» de l'inclinaison à Paris.....	$-3',0$
»	» de la compos. horiz. à Paris..	$+0,00025$

Valeurs de la comp. horiz. dans un édifice charpenté en fer (*Witz*) *à Lille,* de 0,194 à 0,114.

DISTANCES EXPLOSIVES DANS L'AIR.

Entre des disques de $3^{cm},8$ *de diamètre* (*Warren de la Rue et Hugo Muller*).

Force électromotrice en volts.	Distances en centimètres.
1000	0,0205
2000	0,0430
3000	0,0660
4000	0,0914
5000	0,1176
6000	0,1473
7000	0,1800
8000	0,2146
9000	0,2495
10000	0,2863
11000	0,3245
12000	0,3378

Entre des sphères de 1^{cm} *de diamètre* (1) (*d'après les travaux de MM. Thomson, Mascart et Baille*).

Distances en centimètres.	Force électromotrice en volts.
0,01	804
02	1422
03	1920
04	2352
05	2747
06	3125
07	3497
08	3864

(1) Voir A. Witz, *Résistance électrique des gaz dans les champs magnétiques* (*Journal de Physique,* 2e série, t. X, p. 68; 1891).

Distances en centimètres.	Force électromotrice en volts.
0,09	4227
10	4587
11	4944
12	5298
13	5649
14	5997
15	6342
16	6684
17	7023
18	7359
19	7692
20	8022
21	8349
22	8673
23	8994
24	9312
25	9630
26	9945
27	10259
28	10572
29	10884
30	11195
40	14286
0,50	17290

DISTANCES EXPLOSIVES DANS L'AIR.

Entre deux boules de $2^{cm},2$ *de diamètre* (*Mascart*).

Distances.	Différence de potentiel. Unités électrostatiques.	Volts.
cm 0,1	18,3	5490
0,5	89,1	26730
1,0	162	48600
1,5	190	57000
2	216	64800
3	256	76800
5	316	94800
10	397	119100
15	426	127500

Pouvoirs inducteurs spécifiques.

Vide	0,9985	Ayrton et Perry.
Hydrogène	0,9998	Id.
Air	1	Id.
Acide carbonique	1,0008	Id.
Paraffine	1,85 à 2,47	Hopkinson, etc.
Pétrole	2,055	
Soufre	2,58 à 3,21	Gordon, etc.
Ébonite	2,21 à 3,15	Id.
Caoutchouc vulcanisé	2,95	Schiller.
Mica	5	Boltzmann.
Gomme laque	3,15	
Gutta-percha	3,4	
Verre ordinaire	5,83 à 6,34	Schiller.
Flint	3,013 à 10,1	Hopkinson.

Ces chiffres sont extrêmement différents pour des échantillons divers d'une même substance, même pure; la durée de la charge modifie en effet le pouvoir inducteur.

CONSTANTES D'ÉLECTROLYSE.

Équivalents électrochimiques.

	Milligramme-coulomb.	Grammes par ampère-heure.
Hydrogène	0,010384	0,03738
Aluminium	0,1425	0,513
Argent	1,1173	4,022
Bismuth	2,1806	7,85016
Cadmium	0,5815	2,09340
Chlore	0,3686	1,32696
Cuivre	0,3302 (cuivrique)	1,18872
Étain	0,6127 (stanneux)	2,20572
Fer	0,2907 (ferreux)	1,04652
Magnésium	0,1314	0,47304
Mercure	1,0374 (mercureux)	3,73464
Nickel	0,3063	1,10268
Or	2,0456	7,36416
Palladium	0,5491	1,97676

	Milligramme-coulomb.	Grammes par ampère-heure.
Platine	1,0280	3,70080
Plomb	1,0716	3,85776
Potassium	0,4050	1,458
Sodium	0,2387	0,85932
Zinc	0,3370	0,12132

Un ampère-heure donne

416^{cm3} d'hydrogène,
624^{cm3} de gaz tonnant $(2H + O)$;

il décompose

$0^{gr},3354$ d'eau.

Formules pratiques applicables aux voltamètres à poids
(P en milligrammes, t durée en secondes, I en ampères).

Argent..... $I = 0,881 \frac{P}{t}$

Cuivre..... $I = 3,028 \frac{P}{t}$

Équivalents et chaleurs de formation (par équivalent en calories-grammes).

	Équivalent.	Chaleur.	État.	Équivalent électrochimique (ampère-heure-gramme).
HO	9	34500	(liquide)	0,3354
»	»	29100	(gazeux)	
AgO	116	3500	(solide)	
AgCl	143,5	29200	(solide)	5,382
AgO, AzO^5	170	8700	(dissous)	
AgCl	143,5	10700	(solide)	
HCl	36,5	22000	(gazeux)	
CdO, SO^3	104	53500	(dissous)	
CuCl	67,2	31300	(dissous)	
CuO (bioxyde)	39,7	19200	(solide)	

	Équivalent.	Chaleur.	État.	Équivalent électrochimique (ampère-heure-gramme).
CuO, SO^3	79,5	29600	(dissous)	4,676
FeO	36	34500	(solide)	
Fe^2O^3	80	95600	(solide)	
FeO, SO^3	76	47000	(dissous)	5,213
HgO	108	15500	(solide)	
HgO, SO^3	148			
PbO	111,5	25500	(solide)	
$PbO + HO$	120,5	26700	(solide)	
PbO, SO^3	151,5	36200	(solide)	
ZnO	40,5	43200	(solide)	
ZnO, SO^3	72,5	53650	(dissous)	5,390
$ZnCl$	68	48600	(solide)	
»	»	56400	(dissous)	
ZnS	48,5	20940	(solide)	
SO^3, HO	49	61700	(liquide)	
AzO^5, HO	63 = $\begin{cases} AzO^2 + 3O \\ AzO^3 + 2O \end{cases}$	$\begin{cases} 6880 \\ 13650 \end{cases}$	(liquide)	
$PhO^5, 3HO$	98	197000	(liquide)	
$C^4H^4O^4$	60	116000	(liquide)	

Données pratiques d'électrolyse (*Gore, cité par Eric Gérard*).

Électrolyse.	Densité de courant (ampère par centimètre carré).	Différence de potentiel aux électrodes.
		volts
Sulfate de cuivre	0,012 à 0,017	0,7
Cyanure de cuivre	0,006	3,0
Cyanure d'argent	0,005	1,0
Cyanure d'or	0,001	4,0
Sulfate double de nickel et d'ammonium	0,003 à 0,006	2 à 3

DIFFÉRENCES DE POTENTIEL AU CONTACT EN VOLTS (D'APRÈS AYRTON, PERRY ET EVERETT).

1° *Liquides et solides.*

	C.	Cu.	Fe.	Pb.	Pt.	Zn.	ZnO, SO^3, diss. de dens. = 1,12.	CuO, SO^3, diss. sat.	AzO^5, HO, conc.
Eau acidulée par SO^3, HO en faible proportion						−0,241			+0,078
SO^3, HO + 10 vol. HO	+0,035					−0,358			
SO^3, HO + 5 vol. HO						−0,429			
SO^3, HO		+1,113				+0,848			
AzO^5, HO					+,0672				
CuO, SO^3, diss. de densité = 1,09		+0,103					+0,090		
CuO, SO^3, dissolution saturée		+0,070					+0,095		
ZnO, SO^3, dissolution saturée					+0,057	−0,430		−0,095	
AzH^4Cl, dissolution saturée		−0,396	−0,652	−0,189		−0,637			

2° *Solides avec solides dans l'air.*

	CHARBON.	FER.	PLOMB.	CUIVRE.	PLATINE.	ZINC.
Cuivre	−0,370	+0,146	+0,542	0	−0,238	+0,750
Platine	−0,858	+0,369	+0,771	+0,238	0	+0,981
Zinc	−1,096	−0,600	−0,210	+0,750	−0,981	0
Zinc amalgamé	−1,208	−0,744	−0,357	−0,894	−1,125	−0,144
Laiton	−0,414	+0,064	+0,472	−0,087	−0,287	+0,679

PILES.

	Liquide excitateur.	Corps dépolarisant.	Électrode conductrice.	Force électromotrice en volts.
Volta	$SO^3, HO + nHO$		Cu	0,78
Smée	Id.		Ag platiné	0,85
Upward	Solution de chlore		C	2,10
Leclanché	$AzH^4Cl + nHO$	MnO^2	C	1,45
Warren de la Rue	$NaCl + nHO$	$AgCl$	Ag	1,06
De Lalande et Chaperon	$KO, HO + nHO$	CuO^2	Cu	0,85
Maiche	$AzH^4Cl + nHO$		C platiné	1,25
Scrivanow	$KO, HO + nHO$	$AgCl$	Ag	1,03
Niaudet	$NaCl + nHO$	Chlorure de chaux	C	1,60
Daniell	$SO^3, HO + nHO$	CuO, SO^3	Cu	1,07
Reynier	$NaO, HO + nHO$	CuO, SO^3	Cu	1,50
Grove	$SO^3, HO + nHO$	AzO^5, HO	Pt	1,96
Bunsen	$SO^3, HO + nHO$	AzO^5, HO	C	1,90
Callan	$SO^3, HO + nHO$	AzO^5, HO	Fonte de fer	1,68
Poggendorff	$SO^3, HO + nHO$	$KO, 2CrO^3 + SO^3, HO$	C	2,01
Marié-Davy	$SO^3, HO + nHO$	HgO, SO^3	C	1,51
Gouy	$ZnO, SO^3 + nHO$	HgO^2	Hg	1,39
Renard	$CrO^3 + nHO$	$HCl + nHO$	Ag platiné	1,20

Piles étalons (température de 15°).

Post-Office	$ZnO, SO^3 + nHO$ (solution saturée)	CuO, SO^3 (solution demi-saturée)	Cu	1,074
Warren de la Rue	AzH^4Cl (solution $\frac{22}{1000}$)	$AgCl$	Ag	1,068
Latimer-Clarke	ZnO, SO^3 fondu	$HgOSO^3$ en pâte	Hg	1,438
J. Regnault	$SO^3, HO + 12HO$	CdO, SO^3 (solution saturée)	Cd	0,34
Gouy	ZnO, SO^3, en dissolution de densité 1,06	Oxyde jaune de mercure	Hg	1,3894
Piltschikoff	ZnO, SO^3 (solution saturée)	CuO, SO^3 (solution saturée)	Cu	1,07

Dans toutes ces piles, l'électrode soluble est formée d'une lame de zinc amalgamé.

Résistance intérieure des piles.

	Hauteur de l'élément.	r en ohms.
	cm	
Daniell	20	1,5 à 2,8
Daniell	6	0,90
Grove	20	0,30
Bunsen	20	0,10 à 0,24
Poggendorff	20	0,20 à 0,25
Reynier	20	0,075
Leclanché	20	1,10

Ces chiffres ne peuvent être qu'approximatifs, car la résistance d'un élément varie notablement avec la dimension et l'écartement des électrodes, la concentration des liquides, la nature des vases poreux, etc., toutes choses qu'il est difficile d'évaluer en général.

Accumulateurs.

	Type.	Force électromotrice normale.	Capacité par kilogramme de plomb.	Énergie par kilogramme de plomb.
		volts	coulombs	kgm
Planté	Formation autogène, plomb-plomb	2,10	24500	5200
Faure (E.P.S.)	Formation hétérogène, minium-litharge	2,05	19000	3800
De Montaud	Dépôt chimique de plomb	2,10	39600	8477
Julien	Genre Faure	2,10	54000	12342
Reynier	Plomb-zinc	2,36		
Sutton	Plomb-cuivre	1,25		
Commelin-Desmasures	Fer étamé-cuivre	0,8	350000	36000
Oerlikon	Genre Faure	2,10	32000	6800
Tudor	Genre Faure	2,10	12240	2600
Laurent-Cély	PbCl-Zinc	2,10	35000	

On énonce fréquemment la capacité en ampère-heure : un ampère-heure = 3600 coulombs. En pratique, on compte sur une capacité de 8 à 10 ampères-heure par kilogramme de plomb des plaques.

Résistance intérieure.

Genre Planté..... $r = \frac{2}{S}$; S = surface en D^2.

Genre Faure..... $r = \frac{0,008}{p}$; p = poids d'électrode en kilogrammes.

Ces chiffres ne sont qu'approximatifs.

PILES THERMOÉLECTRIQUES.

Différences de potentiel en microvolts par degré centigrade (Matthiessen et Jenkin), par rapport au plomb, à 20°.

Sélénium	—800,0
Antimoine (direction axiale)	— 22,6
Fil d'archal (cordes de piano)	— 17,50
Antimoine du commerce	— 6,0
Cuivre galvanoplastique	— 3,8
Zinc pur	— 3,7
Argent pur	— 3,0
Antimoine pur	— 2,8
Or	— 1,2
Platine	— 0,9
Cuivre du commerce	— 0,1
Étain	— 0,1
Plomb	0
Mercure	+ 0,41
Maillechort	+ 11,63
Cobalt	+ 22
Bismuth (direction axiale)	+ 64
Bismuth pur	+ 88
Bismuth comprimé	+ 96

Variations des pouvoirs avec les températures en microvolts (Matthiessen et Everett).

Fer	$-17,34$	$+0,048t$
Cuivre	$-1,36$	$-0,0095t$
Argent	$-2,14$	$-0,015t$
Maillechort	$+12,07$	$+0,051t$
Plomb	0	

t est la température moyenne des soudures du couple; la différence de potentiel est relative à une différence de température de 1° entre les soudures.

Forces électromotrices en volts et résistances des piles thermoélectriques usuelles.

		E.	r.
Bunsen	Pyrite-cuivre	0,110	
Marcus	Cuivre (antimoine-bismuth)	0,004	
Becquerel	Cuivre (sulfure de cuivre)	0,095	
Noé	Maillechort-antimoine	0,062	0,025
Clamond	Fer (Sb, Zn, Bi)	0,050	0,028
Chaudron	»	0,058	0,007

Ces chiffres ne sont donnés ici qu'à titre d'indication générale, car les différences de potentiel varient avec la température des soudures, qu'il est impossible d'indiquer autrement qu'en disant qu'elle a une valeur moyenne.

Poêle thermoélectrique du Dr Giraud.

700 éléments, fer-blanc (Zn + Sb).

Températures des soudures	200° et 380°
Volts par élément	0,05 à circuit ouvert
»	0,025 en travail maximum
Résistance par élément, à chaud	0,01 ohm

RÉSISTANCES.

Résistance des métaux (*Mascart et Joubert*)

	Résistance spécifique en U.E.M.	Résistance en ohms. 1m de fil pesant 1 gr.	Résistance en ohms. 100m de fil de 0 cm, 1 de diam. = 0 cm², 0079 de section.
Argent recuit.....	$1,492 \times 10^3$	0,1517	1,899
Cuivre »	1,584	0,1415	2,017
Or »	2,041	0,4007	2,598
Aluminium recuit....	2,889	0,0743	3,678
Zinc comprimé.....	5,580	0,3995	7,105
Platine recuit.....	8,981	1,9250	11,435
Fer »	9,636	0,7518	12,27
Nickel »	11,356	1,052	15,73
Plomb comprimé.....	19,465	2,217	24,78
Mercure.....	94,34	12,826	120,11
Maillechort.....	20,76	1,817	26,43
Métal blanc allemand..		1,850	26,95

(Un ohm vaut 63m,13 de fil de cuivre recuit de 1m² de section.)

Résistance des charbons à lumière (*fabrication Carré*).

Diamètre en millimètres.	Résistance en ohms.
1	50
2	12,5
3	5,55
4	3,125
5	2,000
6	1,320
8	0,781
10	0,500
12	0,348
15	0,222
20	0,125

Cette résistance diminue de $\frac{1}{1912}$ par degré d'élévation de température (Joubert).

Résistance des fils de divers métaux (Annuaire du Bureau des Longitudes).

Métal.	Fil de 10m par millimètre carré.	Fil de 10m pour un diamètre de 0cm,1.	Coefficient α de résistance par degré vers 20°.
Argent recuit	0,1492	0,1900	0,00377 à 0,00405
» écroui	0,1620	0,2062	
Cuivre recuit	0,1584	0,2017	0,00388
» écroui	0,1620	0,2063	
Or recuit	0,2041	0,2599	0,00365
» écroui	0,2077	0,2645	
Aluminium recuit	0,2889	0,3679	0,00390
Platine	0,8982	0,1435	0,00247
Fer	0,9638	1,227	0,00463
Nickel	1,236	1,573	
Mercure	9,434	12,012	0,000887
2 or + 1 argent	1,078	1,372	0,00065
Maillechort	2,076	2,643	0,00044 à 0,00028
9 platine + 1 iridium	2,163	2,754	0,00133
2 platine + 1 argent	2,419	3,080	0,00024 à 0,00027

$$R_t = R_0(1 + at).$$

Résistance du fil télégraphique français en fer de diamètre d.

$$R = \frac{144}{d^2} \text{ ohm par kilomètre.}$$

	Résistance au mètre d'un fil de 0cm,1 de diamètre.	Résistance à la rupture en kilogr. par millimètre carré.
	ohm	
Bronze silicieux	0,034	70
» phosphoreux	0,060	90
» chromé	0,032	60
Acier	»	»
Fer	»	»

Résistance des fils de cuivre pur à 0°, recuit (Culley).

Diamètre en centimètres.	Poids gr. par mètre.	Longueur mètr. par kilogr.	Résistances. Ohms par mètre.	Résistances. Mètres par ohms.
0,01	0,07	14369	2,056	0,486
0,02	0,28	3614	0,514	1,945
0,03	0,72	1607	0,228	4,377
0,04	1,17	902	0,122	8,173
0,05	1,74	576	0,081	12,305
0,06	2,52	400	0,057	17,560
0,07	2,83	294	0,042	23,900
0,08	4,47	225	0,032	31,225
0,09	5,66	178	0,025	39,515
0,10	6,99	144	0,020	48,782
0,11	8,47	119	0,017	59,024
0,12	10,06	100	0,014	70,247
0,13	11,84	85	0,012	82,420
0,14	13,70	73	0,0105	95,651
0,15	15,75	63	0,0091	109,75
0,16	17,89	56	0,0080	124,90
0,18	22,70	44	0,0063	158,08
0,2	27,95	36	0,0051	195,15
0,3	62,92	16,0	0,0023	439,07
0,4	112,13	9,1	0,0013	766,20
0,5	175,00	5,7	0,0008	1238,50
1	699,00	1,4	0,0002	4999,00

VARIATIONS DE LA RÉSISTANCE DU CUIVRE AVEC SON ÉTAT MOLÉCULAIRE.

Résistances d'un fil de 0^{cm},1 de diamètre en ohms.

Recuit à 0°.	Étiré à 0°.	Recuit à 15°.	Étiré à 15°.
0,0206	0,0210	0,0218	0,0223

Résistance de fils de cuivre de qualités différentes à des températures croissantes (Culley).

	Résistance en ohms de 1m de fil pesant 1 gramme.			
		Qualité.		
Température.	Cuivre pur.	95 pour 100.	90 pour 100.	85 pour 100.
0°	0,1440	0,1515	0,1600	0,1694
5	0,1467	0,1544	0,1630	0,1725
10	0,1494	0,1573	0,1660	0,1757
11	0,1502	0,1581	0,1668	0,1767
12	0,1507	0,1586	0,1674	0,1773
13	0,1513	0,1592	0,1680	0,1779
14	0,1519	0,1598	0,1686	0,1786
15	0,1525	0,1605	0,1692	0,1793
16	0,1531	0,1611	0,1699	0,1801
17	0,1537	0,1617	0,1706	0,1808
18	0,1542	0,1623	0,1713	0,1815
19	0,1548	0,1629	0,1720	0,1821
20	0,1554	0,1635	0,1726	0,1827
21	0,1560	0,1641	0,1732	0,1835
22	0,1566	0,1648	0,1738	0,1841
23	0,1572	0,1654	0,1744	0,1848
24	0,1578	0,1661	0,1752	0,1855
25	0,1584	0,1668	0,1759	0,1863
26	0,1590	0,1674	0,1766	0,1870
27	0,1596	0,1681	0,1773	0,1877
28	0,1601	0,1687	0,1779	0,1884
29	0,1607	0,1693	0,1786	0,1891
30	0,1613	0,1699	0,1793	0,1898
31	0,1620	0,1705	0,1800	0,1906
32	0,1626	0,1711	0,1807	0,1913
33	0,1632	0,1718	0,1813	0,1921
34	0,1638	0,1724	0,1819	0,1928
35	0,1644	0,1730	0,1826	0,1934
36	0,1650	0,1736	0,1832	0,1941
37	0,1656	0,1743	0,1839	0,1949
38	0,1662	0,1750	0,1846	0,1955
39	0,1668	0,1756	0,1853	0,1962
40	0,1674	0,1762	0,1860	0,1969

Constantes du cuivre.

Densité moyenne	8,88
Elle monte quelquefois à	9
Charge de rupture	28^{kg} par millim. carré
Poids d'un fil par mètre en grammes	$p = 6,773 \times d$
Diamètre d'un fil pesant n grammes par mètre	$d = \sqrt{0,143p}$

(On exprime d en millimètres).

Constantes du fer.

Densité moyenne	7,8
Charge de rupture	60^{kg} par millim. carré
Poids du fil de 4^{mm} de diamètre	100^{kg} par kilomètre

RÉSISTANCES SPÉCIFIQUES DES LIQUIDES α EN OHMS-CENTIMÈTRES EN FONCTION DE LEURS DENSITÉS.

Acide sulfurique (*à* 22°) (*Kohlrausch et Nippolt*).

Densité de la solution.	Proportion d'acide pour 100.	Résistance spécifique.
1,0504	8,3	3,252
1,0989	14,2	1,787
1,1431	20,2	1,414
1,2045	28,0	1,239
1,3163	41,5	1,347
1,5026	60,3	2,412

Sulfate de cuivre (*à* 10°) (*Ewing et Mac Gregor*).

1,0318	98,7
1,0858	47,3
1,1386	35,0
1,1679	31,7
1,1829	30,6
1,2051 (saturation)	29,3

Sulfate de zinc (*à* 10°) (*Ewing et Mac Gregor*).

Densité de la solution.	Proportion d'acide.	Résistance spécifique.
1,0540		63,8
1,1019		42,1
1,1845		32,1
1,2562		29,2
1,2891		28,3
1,3288		29,2
1,4053		32,1
1,4220 (saturation)		33,7

Pour passer aux degrés Baumé, on notera les concordances suivantes :

	Densité.
0 Baumé	1
7	1,0509
12	1,0907
17	1,1335
22	1,1798
27	1,2301
32	1,2849
37	1,3447
41	1,3968

Résistances spécifiques comparées des liquides (*en ohms-centimètres*) (*Paalzow*).

SO^3, HO + 14HO	1,336
AzO^5, HO (densité = 1,185)	1,287
HCl dissous (densité = 1,109)	1,315
KO, HO dissous (densité = 1,274)	1,850
ZnO, SO^3 + 24HO	18,02
CuO, SO^3 + 45HO	19,10
HO distillée	7×10^5
Alcool absolu	30×10^5

Maximum de conductibilité (*Mascart et Joubert*).

	Teneur pour 100.	Densité.	Résistance spécifique.
AzO^5, HO	20,7	1,185	1,287
HCl	18,3	1,1092	1,315
SO^3, HO	30,4	1,224	1,364
KO, HO	28,0	1,274	1,850
ZnO, SO^3	23,5	1,286	21,350

Résistance spécifique des isolants (*Ayrton et Perry*).

	mégohms		Températures.
Verre	1012	$\times 10^6$	0°
Cristal	1675	$\times 10^{10}$	0
Porcelaine	5421	$\times 10^{12}$	0
Mica	0,084	$\times 10^9$	20
Gutta-percha	0,45	$\times 10^9$	24
Caoutchouc (Hooper)	7,5	$\times 10^9$	24
Gomme laque	9,0	$\times 10^9$	28
Ébonite	28,0	$\times 10^9$	46
Paraffine	34,0	$\times 10^9$	41

Variation avec la température : $R_0 = R_t a^t$.

Pour le caoutchouc : $a = 0,945$.

ÉLECTRO-AIMANTS.

Formules pratiques.

NI ampères-tours.

F force portante en grammes.

l longueur totale du circuit magnétique.

μ perméabilité magnétique du fer.

S section de l'électro.

$$NI = 125 \frac{l}{\mu} \sqrt{\frac{F}{S}} \text{ (Hospitalier).}$$

Cette formule s'applique aussi bien aux aimants courbes qu'aux aimants droits.

M. Fröhlich a proposé une formule qui est fonction des constantes d'aimantation : elle a été modifiée d'une façon très heureuse par M. Sylvanus Thompson. Voici cette formule :

H, intensité du champ produit.

G, coefficient dépendant de la forme.

$\varkappa$, coefficient de susceptibilité du fer.

σ, coefficient de saturation.

NI, ampères-tours.

1° Avant la saturation :

$$H = G\varkappa NI,$$

2° A saturation :

$$H = GNI \frac{\varkappa}{1 + \sigma NI}.$$

La fraction σ a une valeur extrêmement petite; ainsi, pour l'inducteur d'une dynamo Edison-Hopkinson, M. Sprague a trouvé une valeur de σ égale à $\frac{1}{20880}$.

Dans un aimant droit, $G = \frac{2\pi}{l}$.

Enfin M. Fröhlich a donné une formule qui donne $\mathfrak{M}$, le moment magnétique, en fonction de I et de deux paramètres a et b.

$$\mathfrak{M} = \frac{I}{a + bI}.$$

Coefficients de self-induction (*Ledeboer*).

Bobine gros fil	L_s	$= 0{,}00085 \times 10^9$ cm
» avec noyau de fer		$= 0{,}0088 \times 10^9$
» fil fin		$= 0{,}0225 \times 10^9$
» avec noyau de fer		$= 0{,}23 \times 10^9$
Inducteur Gramme (type d'atelier)		$= 0{,}352 \times 10^9$
Induit » (champ non excité)		$= 0{,}0287 \times 10^9$
» » (champ excité)		$= 0{,}0152 \times 10^9$

Coefficients de self-induction (*Sumpner*).

Anneau Gramme : inducteur excité par 0 ampère.	L_s	$= 0{,}0218 \times 10^9$ cm
» » 6,1 »		$= 0{,}0179 \times 10^9$
» » 24,0 »		$= 0{,}0122 \times 10^9$

DONNÉES RELATIVES A L'ÉCLAIRAGE.

Arc voltaïque.

Lampes.	Diff. de pot. aux bornes (volts).	Intensité du courant (ampères).	Intensité (moy. sphér.) (carcels).	Puissance dépensée dans l'arc (watts).	Carcels par cheval.
Gramme.....	46,4	3,64	32,6	169	142
»	45,5	12,9	119,3	587	149
Jaspar	47,5	20,7	198	983	148
Dulait.....	47,0	14,6	137	686	147
Brush.....	47,1	6,0	34,8	282	91
Siemens.....	53,0	35,0	306	1855	121
Cance.....	51,4	6,25	42,2	321	97
Jablochkoff.....	42,0	8,5	23,3	357	52

Incandescence.

Lampes.	Diff. de pot. aux bornes (volts).	Intensité du courant (ampères).	Intensité (moy. sphér.) (bougies).	Puissance dépensée dans le fil (watts).	Watts par bougie.
Edison.....	48,9	0,81	8	39,6	4,95
»	106	0,66	16	70	4,37
»	109	1,37	32	149,5	4,66
»	110	0,55	16	60,5	3,8
Swan.....	36	1,42	16	51	3,2
»	100	0,48	16	48	3,0
Maxim.....	50	1,77	20	88,5	4,4
Siemens.....	100	0,41	12	41	3,4
»	100	0,55	16	55	3,4
»	100	0,80	25	80	3,2
Bernstein.....	28	5,4	50	151	3,0
»	34	8,5	90	289	3,2
»	46	11,8 (1)	460	542,8	1,2
Khotinski	150	0,36	16	54	3,4

(1) Ce régime est exceptionnel et ne pourrait être prolongé sans brûler la lampe. Du reste, en thèse générale, le grand éclat et les forts rendements sont obtenus au détriment de la durée des lampes, ainsi qu'il ressort du Tableau suivant.

Rendement horaire des lampes à incandescence Swan-Edison (Electrical Review).

Heures.	Lumière. Bougies.	Travail. Watts par bougie.	Dépense pour 16 bougies durant 100 heures à 0 fr., 05 le watt-heure.
			fr
0	19,3	3,34	0
100	18,8	3,35	5,40
200	17,2	3,79	5,80
300	15,6	4,10	6,30
400	15.2	4,17	6,60
500	14,8	4,29	6,75
600	14,4	4,38	6,90
700	14,1	4,50	7,10
800	13,3	4,68	7,35
900	12,4	4,90	7,65
1000	12,0	5,00	7,90

DONNÉES EXPÉRIMENTALES RELATIVES AUX GÉNÉRATEURS MÉCANIQUES D'ÉLECTRICITÉ.

Machine Gramme (série dynamo).

Type : 135 volts, 25 ampères, 1750 tours.

Résistance à froid..... .... 1,083 ohm { Inducteurs..... 0,634 ohm
Induit..... ..... 0,449 ohm }

Résistance à chaud..... ... 1,136 ohm

E (volts).	I (ampères).	Résistance (ohms) extérieure.	Résistance (ohms) totale.	Puissance (kgms) $\mathcal{P}_m$.	Puissance (kgms) $\mathcal{P}_e = \frac{(E+IR)I}{9,81}$.	Puissance (kgms) $\mathcal{P}_t = \frac{EI}{9,81}$.	Rendement $\frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_m}$.	Rendement $\frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_e}$.	Rendement $\frac{\mathcal{P}_e}{\mathcal{P}_m}$.
50,00	4,16	12,01	13,15	52,80	22,80	20,80	0,394	0,912	0,431
87,50	8,57	10,30	11,34	113,35	83,35	75,00	0,661	0,900	0,735
120,00	14,56	8,19	9,33	224,18	194,28	169,92	0,758	0,875	0,866
129,00	18,01	7,16	8,30	298,42	268,42	232,20	0,778	0,865	0,832
102,00	51,01	2,00	3,14	846,00	816,00	520,20	0,615	0,638	0,964

Données relatives à des dynamos.

	Shunt-dynamo. Edison-Hopkinson.	Compound-dynamo. Victoria-Brush.
Force électromotrice aux balais...	99,3 volts	113,3 volts
Force électromotrice totale.....	103,0 volts	110,0 volts
Vitesse.....	289 tours	750 tours
Courant dans l'induit.....	112,56 ampères	113,2 ampères
Courant dans les inducteurs en série.....		110,0 ampères
Courant dans les inducteurs en dérivation.....	2,68 ampères	3,2 ampères
Puissance dans l'induit.....	0,58 cheval	319,3 watts
Puissance dans l'inducteur en série.		53,8 watts
Puissance dans l'inducteur en dérivation.....	0,36 cheval	355,6 watts
Puissance disponible dans le circuit extérieur $\mathcal{P}_\varepsilon$.....	14,97 chevaux	12100 watts
Puissance totale $\mathcal{P}_e$.....	15,91 chevaux	12828,7 watts
Puissance dépensée $\mathcal{P}_m$.....	17,34 chevaux	13297,0 watts
Rendement théorique $\frac{\mathcal{P}_e}{\mathcal{P}_m}$.....	0,92	0,95
Rendement électrique $\frac{\mathcal{P}_\varepsilon}{\mathcal{P}_e}$.....	0,94	0,94
Rendement industriel $\frac{\mathcal{P}_\varepsilon}{\mathcal{P}_m}$.....	0,86	0,91

DONNÉES DE CONSTRUCTION.

(*Aide-Mémoire Bernard Tignol*).

	Force électr. aux bornes (volts).	Courant extérieur (ampères).	Flux d'induction utile (C.G.S.).	Champ (C.G.S.).	Nombre de tours par minute.	Vitesse linéaire (mètres).	Emploi.
Edison-Hopkinson	103	320	11×10^6	7000	750	9	Éclairage par incand.
Manchester.....	105	130	$3,75 \times 10^6$	4500	1050	13	Id.
Gramme (supérieur).....	110	40	$1,6 \times 10^6$	4700	1400	13	Id.
Brush	2700	10			650	22,5	Éclairage par arc.
Paterson et Cooper.....	250	100	$6,25 \times 10^6$	3700	700	12,6	Id.
Statter.....	600	9,5	$2,15 \times 10^6$	1900	600	5	Id.

LIVRE III.

LES PROBLÈMES.

CHAPITRE I.

AIMANTS [1].

1. *Un barreau d'acier aimanté a la forme d'un parallélépipède rectangle; il mesure* 12^{cm} *de longueur,* 3^{cm} *de largeur et* 2^{cm} *de hauteur et pèse* $561^{gr},6$. *On le fait osciller à Lille, et il exécute une oscillation en* $7,54$ *secondes. Calculer, d'après ces données, son moment magnétique et dire l'intensité d'aimantation et la masse magnétique aux pôles du barreau.*

Soit $\mathfrak{M}$ le moment magnétique du barreau et H l'intensité

[1] Le moment d'inertie K d'un solide, tournant autour d'un axe, est égal à la somme Σmr^2 des produits de la masse m des points qui le constituent par le carré de leurs distances respectives r à l'axe. Une intégration permet de déterminer cette quantité pour un corps de forme géométrique. Voici les résultats de ce calcul pour quelques solides : il importe de ne pas oublier que le poids p est la masse du corps en unités C.G.S.

Fil fin prismatique de poids p, de longueur $2l$, tournant autour d'un axe transversal passant par le centre de gravité... $K = p\,\frac{4l^2}{3}$.

Cylindre circulaire, de rayon R et de longueur $2l$, mobile comme ci-dessus..... $K = p\left(4\,\frac{l^2}{3} + \frac{R^2}{4}\right)$.

Barreau prismatique de longueur $2l$, ayant une largeur b et une hauteur c, mobile comme ci-dessus..... $K = \frac{p}{12}\,(4l^2 + b^2)$.

Sphère de rayon R, mobile autour d'un axe diamétral..... $K = \frac{2}{5}\,\frac{p}{R^2}$.

du champ à Lille; on a, pour la durée d'une oscillation,

$$t = \pi\sqrt{\frac{K}{\mathfrak{M}H}}, \qquad \mathfrak{M}H = \frac{\pi^2}{t^2}K.$$

Il faut donc calculer K.

$$K = \frac{p}{12}(4l^2 + b^2) = \frac{561,6}{12}(144 + 9) = 7160,4 \text{ unités C.G.S.}$$

Il vient

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi^2}{t^2}\frac{K}{H} = \frac{\overline{3,1416}^2}{\overline{7,54}^2}\frac{7160,4}{0,19} = 6542 \text{ U.M.}$$

Or

$$\mathfrak{M} = 2ml, \qquad m = \frac{\mathfrak{M}}{2l} = \frac{6542}{12} = 545,17 \text{ U.M.}$$

Enfin,

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{M}}{v} = \frac{6542}{72} = 90,86 \text{ U.M.}$$

2. *Un barreau d'acier de* 662^{gr} *a un moment magnétique égal à* 15358 *unités; calculer l'intensité d'aimantation moyenne de ce barreau.*

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{M}}{v} = \frac{15358 \times 7,8}{662} = 180 \text{ U.M.}$$

La densité de l'acier a été prise égale à 7,8.

3. *Un fil de fer doux, de* 1^{cm} *de diamètre et* 100^{cm} *de longueur, est placé parallèlement aux lignes de forces du champ terrestre à Paris; quelle sera l'intensité de son aimantation et son moment magnétique?*

$$\mathfrak{I} = xH = 33 \times 0,464 = 15,31 \text{ U.M.}$$

Le volume de l'aimant étant égal à $0,0079 \times 100 = 0^{cm^3},79$, nous aurons

$$\mathfrak{M} = v\mathfrak{I} = 0,79 \times 15,31 = 12,10 \text{ U.M.}$$

4. *Un barreau aimanté de* 20^{cm} *de longueur a un moment*

magnétique $\mathfrak{M} = 200$; *quel est le potentiel en un point, situé sur le prolongement de son axe, à une distance égale à sa longueur?*

$$\mathfrak{M} = 2ml,$$

$$m = \frac{\mathfrak{M}}{2l},$$

$$V = m\left(\frac{1}{2l} - \frac{1}{4l}\right) = \frac{m}{2} = \frac{\mathfrak{M}}{4l} = \frac{200}{40} = 5 \text{ U.M.}$$

5. *Marquer sur ce barreau un point ayant le même potentiel que le précédent.*

Pour un point intérieur, placé à une distance x du pôle voisin du point extérieur, nous aurons

$$V = m\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2l - x}\right)$$

$$= 2m\frac{l - x}{x(2l - x)} = \frac{m}{2},$$

$$x^2 - 2(l + 2)x + 4l = 0,$$

$$x = l + 2 \pm \sqrt{l^2 + 4} = 12 \pm 10,198.$$

La seule valeur de $x = 1,802$ convient à la solution, car l'autre point est extérieur à l'aimant.

6. *La densité superficielle d'un barreau dont l'aimantation est uniforme est égale à son intensité d'aimantation.*

Si le pôle possède une quantité m, répartie sur sa section terminale S, on a, pour sa densité superficielle,

$$\sigma = \frac{m}{S}.$$

Mais

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{M}}{v} = \frac{2ml}{2Sl} = \frac{m}{S}.$$

Donc

$$\sigma = \mathfrak{I}.$$

Cette égalité est réelle, car la densité superficielle est homogène à l'intensité d'aimantation; leurs dimensions sont

$$L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}.$$

7. *Quelle est l'énergie intrinsèque d'un barreau aimanté de* 25^{cm} *de longueur,* 4^{cm^2} *de section, dont l'intensité d'aimantation est de* 400 *unités?*

L'énergie intrinsèque résulte du seul fait de l'aimantation : il s'agit donc de calculer le travail qu'il a fallu dépenser pour former cet aimant, dont nous supposons l'aimantation uniforme. On peut supposer que les deux pôles, confondus d'abord, ont été séparés et portés à la distance $2l$, qui est la longueur du barreau; le travail $\mathfrak{T}$ à dépenser pour cela est égal au produit de la masse déplacée m par la différence de potentiel obtenue. Cette différence, nulle d'abord, est devenue progressivement égale à V; donc $\mathfrak{T} = \frac{1}{2} m\mathrm{V}$, $\frac{\mathrm{V}}{2}$ étant la valeur moyenne de la différence de potentiel.

Mais cette différence de potentiel V est égale au produit $\mathrm{H}2l$ du champ H dû à l'aimant par la distance $2l$ des pôles [1] : nous avons donc

$$(2) \qquad \mathfrak{T} = \tfrac{1}{2} m\mathrm{V} = \tfrac{1}{2} m\mathrm{H}2l = \tfrac{1}{2}\mathfrak{I}\mathrm{SH}2l = \tfrac{1}{2}\mathfrak{I}v\mathrm{H},$$

v étant le volume de l'aimant.

Or le flux émané d'un pôle est

$$(3) \qquad \varphi = \mathrm{HS} = 4\pi\mathfrak{I}\mathrm{S},$$

d'où

$$\mathrm{H} = 4\pi\mathfrak{I}.$$

Donc

$$\mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{I}v\mathrm{H} = 2\pi\mathfrak{I}^2 v.$$

---

[1] En effet, dans un champ uniforme, la force exercée sur le pôle m est égale à $m\mathrm{H}$ et, comme la projection de la distance des pôles sur la direction des lignes de force est $2l$, la différence de potentiel a pour expression $\frac{2ml\mathrm{H}}{m} = \mathrm{H}2l$.

C'est l'énergie intrinsèque W de l'aimant proposé; il vient par suite

$$W = 6,28 \times 160000 \times 4 \times 25 = 100480000 \text{ ergs}$$
$$= 10,05 \text{ joules.}$$

8. *Un cylindre de fer doux est amené de l'infini dans un champ magnétique de* 100 *unités; on demande de combien s'échaufferait ce barreau, si on le désaimantait brusquement en le reportant à l'infini.*

Le travail nécessaire pour amener un aimant de l'infini dans le champ donne la mesure de l'énergie potentielle du barreau; celle-ci dépend non seulement des conditions de l'aimant formé, mais encore de sa position dans le champ.

Comme ci-dessus, nous aurons

$$\mathfrak{T} = W = \tfrac{1}{2} m V = \tfrac{1}{2} \mathfrak{I} v H,$$

H étant l'intensité du champ et $\mathfrak{I}$ l'intensité d'aimantation développée.

Or

$$\mathfrak{I} = \varkappa H.$$

Donc

$$W = \tfrac{1}{2} \varkappa H^2 v.$$

Faisant $\varkappa$ égal à 33, il vient, par unité de volume,

$$W_1 = \frac{33 \times 10000}{2} = 165000 \text{ ergs.}$$

Il en résulte un échauffement de

$$\frac{165000}{7,8 \times 0,1138 \times 4,17 \times 10^7} = 0^\circ,0044 \text{ C.}$$

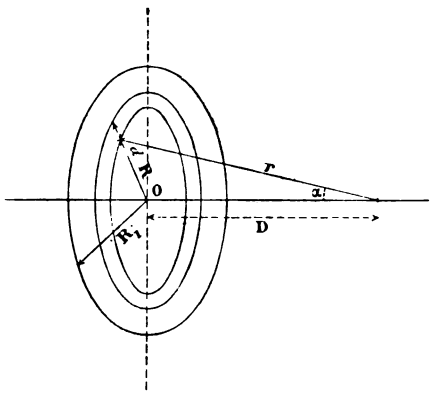
9. *Quelle est l'action exercée par un large pôle circulaire d'aimant sur l'unité de masse magnétique placée sur le prolongement de son axe, à une distance* D *du pôle? Le rayon du cercle est* R_1 *et l'intensité d'aimantation est* $\mathfrak{I}$.

Nous savons d'abord que $\sigma = \mathfrak{I}$.

De plus, nous voyons que l'action df d'une surface annulaire de largeur dR est (*fig.* 15)

$$df = \frac{2\pi R\, dR\, \sigma}{r^2} \cos\alpha.$$

Fig. 15.



Or

$$\cos\alpha = \frac{D}{r}.$$

Donc

$$df = \frac{2\pi RD\sigma}{r^3}\, dR.$$

Il vient

$$f = \int_0^{R_1} \frac{2\pi RD\sigma}{(R^2+D^2)^{\frac{3}{2}}}\, dR = 2\pi\sigma D \int_0^{R_1} \frac{d}{dR}\left(-\frac{1}{(R_1^2+D^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$
$$= 2\pi\sigma\left(1 - \frac{D}{\sqrt{R_1^2+D^2}}\right).$$

10. *Un cylindre de fer doux, d'une longueur* $2l$, *de rayon* R, *est placé dans un champ uniforme, d'intensité* H, *parallèlement à la direction des lignes de force; calculer l'intensité nouvelle que prend le champ au point milieu de l'axe de l'aimant formé.*

La présence du fer doux dans le champ produit une sorte

de condensation du flux; les lignes de force se serrent et l'intensité du champ augmente et devient H'.

Si nous supposons l'aimantation uniforme, l'action due à l'aimant lui-même se superpose à celle du champ, et nous aurons, pour les deux pôles,

$$H' = H + 4\pi\sigma \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}},$$

par application de la formule établie ci-dessus. Or nous avons

$$(5) \qquad \mathfrak{I} = \sigma = \varkappa H = \varkappa \frac{H'}{\mu}.$$

Il vient

$$\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi} \qquad \text{et} \qquad 4\pi\sigma = \frac{\mu - 1}{\mu} H',$$

d'où

$$H' = H + H' \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}},$$

et enfin

$$H' = \frac{H}{1 - \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}}.$$

11. *Un barreau aimanté de* 3^{cm} *de longueur sur* 1^{cm} *d'épaisseur a reçu une aimantation uniforme dont l'intensité* $\mathfrak{I} = 2000$ *unités; on le coupe en deux par une section perpendiculaire à l'axe; quel effort faut-il exercer pour séparer les deux fragments?*

L'aimantation étant uniforme, les surfaces en regard ont des densités égales à $\mathfrak{I}$ en valeur absolue; $\mathfrak{I}$ est l'équivalent de la densité superficielle.

Le flux émané d'un pôle renfermant une quantité m est

$$\varphi = 4\pi m = HS.$$

Donc

$$H = \frac{4\pi}{S} m.$$

La force exercée sur une quantité dm est $\frac{4\pi}{S} m\, dm$.

L'action totale sur une quantité m est

$$\int_0^m \frac{4\pi}{S} m\,dm = \frac{2\pi}{S} m^2 = 2\pi \mathfrak{I}^2.$$

Pour une surface S, nous aurons

$$f = 2\pi \mathfrak{I}^2 S.$$

L'aimant proposé aura donc une force portante de

$$2\pi \times \overline{2000}^2 \times 3 = 37699200 \text{ dynes},$$
$$= 38^{kg},429.$$

Cela fait $12^{kg},4$ par centimètre carré.

12. *Un clou de fer doux, ayant* 20^{mm} *de surface de tête, adhérent au pôle d'un aimant, exige un effort d'arrachement de* $2^{gr},6$; *quelle est l'intensité d'aimantation au point touché?*

C'est par ce procédé que Jamin étudiait la distribution du magnétisme.

La formule du numéro précédent donne

$$\mathfrak{I} = \sqrt{\frac{f}{2\pi S}} = \sqrt{\frac{2,6 \times 981}{2\pi \times 0,2}} = 2030 \text{ U.M.}$$

13. *Calculer la force portante d'un barreau aimanté de* 15^{cm} *de longueur, dont la section est de* 10^{cm^2}; *on connaît d'autre part la valeur de son moment magnétique, qui est égal à* 10000.

La force exercée par un aimant sur son armature est celle qui s'exercerait entre les portions d'un barreau coupé en deux, par un plan perpendiculaire à son axe; l'aimantation étant supposée uniforme dans tous les problèmes de ce genre que nous essayons de traiter par le calcul, les surfaces en regard auront des intensités égales à $\mathfrak{I}$ en valeur absolue :

$$f = 2\pi \mathfrak{I}^2 S.$$

Mais

$$\mathfrak{M} = 2ml = 2\mathfrak{I} S l \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{I} S = \frac{\mathfrak{M}}{2l}.$$

D'autre part,

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{M}}{v},$$

d'où

$$f = \frac{\pi \mathfrak{I} \mathfrak{M}}{l} = \frac{\pi \mathfrak{M}^2}{vl} = 2792526 \text{ dynes} = 2846^{gr}.$$

14. *Quel aurait dû être le moment du barreau ci-dessus pour qu'il eût pu porter son poids?*

$$f = p \times 981 = \frac{\pi \mathfrak{M}^2}{vl},$$

$$\mathfrak{M}^2 = 981 \frac{4 l^3 S^2 D}{\pi} = \frac{3924 \times \overline{7,5}^3 \times \overline{10}^2 \times 7,8}{\pi},$$

$$\mathfrak{M} = 20273 \text{ U.M.}$$

L'intensité d'aimantation aurait donc dû être plus que doublée : elle serait $\frac{20273}{15,0} = 135$, ce qui peut être obtenu aisément [1].

15. *Une aiguille aimantée fait avec le méridien magnétique un angle φ, quand on la porte dans le champ supposé uniforme d'un électro-aimant; le nombre de ses oscillations, qui était de n_0, passe à n par seconde; quel est l'angle δ du champ avec le méridien et son intensité* H'?

En appelant R la résultante des forces H et H', on peut écrire

$$\frac{H}{\sin(\delta - \varphi)} = \frac{H'}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\delta}.$$

De plus,

$$\frac{R}{H} = \frac{n^2}{n_0^2}.$$

On en déduit

$$\sin\delta = \frac{R}{H}\sin(\delta - \varphi) = \frac{n^2}{n_0^2}(\sin\delta\cos\varphi - \sin\varphi\cos\delta);$$

---

[1] M. Kohlrausch a obtenu une intensité de 780 unités avec des tiges très minces. Il existe du reste des aimants qui portent plus de 20 fois leur poids.

d'où

$$\frac{n_0^2}{n^2} = \cos\varphi - \sin\varphi \cot\delta,$$

et enfin

$$\cot\delta = \cot\varphi - \frac{n_0^2}{n^2}\frac{1}{\sin\varphi}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$H' = H\frac{\sin\varphi}{\sin(\delta - \varphi)}.$$

On n'a pas tenu compte dans ce calcul de la modification de l'état magnétique de l'aiguille par le champ lui-même; l'erreur est négligeable, si l'aiguille est courte et très fortement aimantée.

Si l'on avait pris une aiguille faite en métal faiblement magnétique, on aurait eu simplement

$$\frac{H'}{H} = \frac{n}{n_0}.$$

C'est ainsi qu'on opère pour comparer les intensités de deux champs : on emploie alors des aiguilles de fer doux.

16. *Un cadre mobile tourne autour d'un axe, orienté dans le méridien, faisant un angle* β *égal à* 45° *avec l'horizontale; un galvanomètre balistique, dont la durée de l'oscillation libre est* $t = 1,2$ *seconde, et dans lequel un courant de* 10 *milliampères produit une déviation* α *de* 24°, *marque une impulsion* δ, *quand on fait tourner rapidement le cadre de* 180° *sur lui-même; la résistance de ce cadre est de* 0,212 *ohms et la surface totale de ses spires est de* $12\,170^{cm^2}$. *On demande de déduire de cette expérience la valeur de l'intensité horizontale* H *du magnétisme terrestre, sachant que l'inclinaison* i *est égale à* $66^\circ 23'$ *au lieu de l'observation : l'impulsion observée au miroir a été de* $3^\circ 23'$.

Soient H et V les composantes horizontale et verticale du champ terrestre : la variation du flux produite par la rotation de 180° du cadre est

$$\begin{aligned} 2HS\cos\beta + 2VS\sin\beta &= 2HS\cos\beta(1 + \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang} i) \\ &= HS\sqrt{2}(1 + \operatorname{tang} i). \end{aligned}$$

La quantité q d'électricité induite est donc

$$q = \frac{HS\sqrt{2}(1 + \tang i)}{R}.$$

Or nous pouvons calculer la constante du galvanomètre balistique [1] et nous déduisons q de l'impulsion δ : il est à noter que l'intensité du courant I est exprimée en U.E.M. et non en ampères, dans cette formule

$$q = \frac{I}{\tang \alpha}\frac{t}{\pi}\sin \quad = \frac{0,001}{\tang 24^\circ}\frac{1,2}{\pi}\sin\delta = 0,000858 \sin\delta \text{ U.E.M.}$$

Il vient donc

$$H = \frac{0,000858\, R \sin\delta}{S\sqrt{2}(1 + \tang i)} = 0,190 \text{ C.G.S.}$$

Nous avons, dans ce calcul, exprimé R en U.E.M.

$$R = 2,12 \times 10^9 = 212 \times 10^7.$$

---

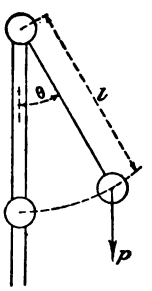
[1] *Voir* ci-après, Chapitre IX, problème 19.

CHAPITRE II.

ÉLECTRICITÉ EN ÉQUILIBRE; POTENTIEL.

1. *Un électroscope de Henley est formé d'une boule mobile, pesant* $1^{gr},2$, *attachée au bout d'un fil de* 8^{cm} *de longueur; quelle charge produira une déviation de* 30°? (*fig.* 16).

Fig. 16.



On voit sur la figure que

$$\frac{f_1 \cos\frac{\theta}{2}}{4l^2 \sin^2\frac{\theta}{2}} = p \sin\theta,$$

en appelant f_1 la force répulsive qui s'exerce entre la boule fixe et la boule mobile, à l'unité de distance, et p le poids de la boule; on en déduit

$$f_1 = 8pl^2 \sin^3\frac{\theta}{2}.$$

Exprimons p en dynes et l en centimètres :

$$f_1 = 8 \times 1,2 \times 981 \times \overline{8}^2 \times \sin^2 15^\circ = 10530 \text{ dynes.}$$

Or la force exercée à l'unité de distance est précisément égale au carré de la charge :

$$q^2 = 10530,$$
$$q = 102 \text{ U.E.S.}$$

En coulombs, nous aurons

$$q = 306 \times 10^9 \text{ coulombs.}$$

2. *Deux balles de sureau pesant chacune* $0^{gr},26$ *sont suspendues par deux fils parallèles, sans raideur et sans poids appréciable, ayant* 50^{cm} *de longueur, de manière qu'elles se touchent; on les charge, et elles s'écartent de* $1^{cm},4$. *Quelle est leur charge?*

Cherchons d'abord l'angle du fil avec la verticale; nous avons

$$0,7 = 50 \operatorname{tang} \alpha,$$
$$\alpha = 48'8''.$$

La force horizontale $f = 981\, p \operatorname{tang} \alpha = 3,57$ dynes.
Enfin

$$f = \frac{qq'}{r^2} = \frac{x^2}{r^2},$$

$$x = r\sqrt{f} = 2,64 \text{ U.E.S.}$$

3. *Deux sphères métalliques électrisées s'attirent dans l'air avec une force de* 20 *dynes; on les porte dans une enceinte remplie d'acide carbonique; quelle sera leur attraction?*

Supposons qu'une des sphères soit le collecteur d'un condensateur à lame d'air : elle aura une capacité C; mais, si le condensateur était à lame d'acide carbonique, la capacité

serait C′ et le potentiel aurait passé de V à V′. On aurait par suite

$$C = \frac{Q}{V}, \qquad C' = \frac{Q}{V'},$$

$$V' = \frac{C}{C'} V = \frac{C}{C'} \frac{M}{r}$$

et l'attraction f deviendrait f' :

$$f' = \frac{C}{C'} \frac{QQ'}{r^2} = \frac{C}{C'} f.$$

Or $\frac{C}{C'}$ est l'inverse du pouvoir inducteur spécifique de l'acide carbonique, égal à 1,0008.

Donc

$$f' = \frac{1}{1,0008} 20 = 19,884 \text{ dynes.}$$

Nous voyons donc ce que devient le coefficient k dans la formule $f = k \frac{qq'}{r^2}$, quand le milieu interposé est de l'acide carbonique : k a pris la valeur 0,9992.

4. *Une sphère conductrice, de rayon* R, *est au potentiel* V; *quelle est la pression électrostatique à sa surface?*

(12) $$p = 2\pi\sigma^2.$$

Or

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{CV}{S} = \frac{RV}{4\pi R^2} = \frac{V}{4\pi R}.$$

Donc

$$p = 2\pi \frac{V^2}{16\pi^2 R^2} = \frac{V^2}{8\pi R^2} = \frac{V^2}{2S}.$$

Cette pression est exprimée en dynes par centimètre carré.

5. *Un ballon sphérique est incomplètement gonflé d'air, et il occupe un volume de* 10^{lit}, *sous la pression normale de* 76^{cm} *de mercure à Paris, soit de* 1,014 *mégadyne par centimètre*

carré. On l'électrise en lui donnant un potentiel de 10 U.E.S.; *de combien augmentera le volume de ce ballon?*

La pression électrostatique est dirigée normalement à la surface sphérique, vers le dehors; elle se retranche donc de la pression atmosphérique; il en résulte que la pression ambiante diminue et le volume du ballon augmente par suite nécessairement.

Un ballon sphérique de 10^{lit} mesure $13^{cm},35$ de rayon et 2239^{cm^2} de surface.

Pour lors, nous avons

$$p = \frac{100}{4478} = 0,0223 \text{ dyne.}$$

La pression ambiante est par suite égale à

$$1014000 - 0,0223 = 1013999,9777 \text{ dynes.}$$

Le volume devient

$$10 \times \frac{1014000}{1013999,98} = 10^{lit},00000002.$$

L'augmentation de volume est insensible.

6. *On charge une sphère de laiton isolée, coupée en deux par une section faite suivant le plan diamétral, au potentiel* V; *son rayon est* R. *Calculer la force répulsive f qui s'exerce entre les deux hémisphères.*

Par élément de surface ds, la pression électrostatique est égale à $p\,ds = 2\pi\sigma^2\,ds$; elle s'exerce normalement à la surface de la sphère, donc radialement par rapport au centre; sa composante normale au plan diamétral de séparation des deux hémisphères est

$$2\pi\sigma^2 ds \cos\alpha = 2\pi\sigma^2 ds_1,$$

ds_1 étant la projection de l'élément ds sur ce plan diamétral.

La somme des composantes ainsi calculées donne

$$f = 2\pi\sigma^2 \int ds_1 = 2\pi^2\sigma^2 R^2.$$

Mais

$$V = \frac{4\pi R^2 \sigma}{R} = 4\pi R \sigma;$$

donc

$$f = \frac{V^2}{8} \text{ dynes.}$$

C'est ainsi que M. Lippmann a réussi à mesurer les potentiels en valeur absolue; la seule difficulté, mais elle est grande, consiste à mesurer f en dynes.

7. *Un plan indéfini est chargé positivement et σ est la densité superficielle de sa charge; quelle force attractive exerce-t-il sur une charge* — Q *placée à une distance* D?

Nous avons déjà vu (problème 9, Chapitre I) que l'action d'un cercle de rayon R_1 sur l'unité de masse est donnée par la relation

$$f = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{D}{\sqrt{R_1^2 + D^2}}\right).$$

Pour $R_1 = \infty$, nous aurons

$$f = 2\pi\sigma,$$

et l'action exercée sur la masse Q sera égale à $2\pi Q\sigma$.

Ce résultat est extrêmement remarquable, puisque nous voyons que la force exercée par un plan indéfini ne dépend en rien de la distance D : c'est la base de la théorie des électromètres à attraction.

8. *Dans un électromètre absolu de Thomson, un disque mobile de surface* S, *au potentiel* V_1, *est placé en face d'un plan indéfini parallèle, porté au potentiel connu et invariable* — V; *ils sont à une distance* D; *ils s'attirent avec une force f; quelle est la valeur de* $V_1 - V$?

En négligeant l'influence perturbatrice des bords, on peut admettre que le champ est uniforme entre les disques et qu'ils constituent des surfaces de niveau parallèles : un tube de force découpe donc sur les deux plans en regard des éléments égaux dont les charges sont égales et de signe con-

traire; les densités superficielles σ sont donc égales entre elles au signe près. Nous avons par conséquent

$$\sigma = \frac{V_1 - V}{4\pi D}. \tag{11}$$

Or le plan supérieur possède une charge $S\sigma$.

Nous savons par suite que

$$f = 2\pi S\sigma^2 = \frac{S(V_1 - V)^2}{8\pi D^2}.$$

On en déduit

$$V_1 - V = D\sqrt{\frac{8\pi f}{S}}.$$

9. *Les boules d'une balance de Coulomb ayant été électrisées au contact, en les mettant en communication avec le pôle positif d'une pile de* 3000 *éléments, on observe, à* 36° *de distance angulaire, une répulsion mutuelle équilibrée par une torsion* $T = (20° + 36°) = 56°$. *Quel est le potentiel du pôle et quelle est la force électromotrice de cette pile en volts? L'autre pôle est à la Terre. Le moment* C *du couple de torsion du fil de la balance est égal à* 16,13 *unités* C.G.S.; *la longueur* l *du levier mesure, depuis l'axe du fil jusqu'au centre de la boule mobile,* $10^{cm},2$; *les boules ont un même diamètre de* 1^{cm}.

L'équation d'équilibre entre la force électrique et la force antagoniste du couple est

$$fl\cos\frac{\alpha}{2} = CT.$$

La force f_1 exercée à l'unité de distance est donc donnée par la relation

$$\frac{f_1}{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\, l\cos\frac{\alpha}{2} = CT,$$

d'où

$$f_1 = \frac{\pi}{45}\, ClT\sin\frac{\alpha}{2}\tang\frac{\alpha}{2} = 64,58 \text{ dynes}.$$

Or

$$q^2 = f_1,$$
$$q = 8,03.$$

Le potentiel est dès lors connu.

$$V = \frac{q}{R} = 16,06 \text{ U.E.S.}$$
$$= 16,06 \times 3 \times 10^2 \text{ volts}$$
$$= 4818 \text{ volts.}$$

Chaque élément a une force électromotrice de 1,66 volt.

10. *Une étincelle jaillit entre deux plateaux distants de* $0^{cm},1$; *quelle est leur différence de potentiel?*

Par interpolation, nous déduisons des Tables données ci-dessus (p. 65)

$$V = 13,30 \text{ U.E.S.}$$
$$= 13,30 \times 3 \times 10^2 = 3990 \text{ volts.}$$

11. *Un tube renferme de l'air raréfié à une pression de* 5^{cm} *de mercure; les électrodes sont formées par de petites sphères de platine ayant un rayon de* $0^{cm},1$; *quel potentiel devra donner la source pour que la décharge puisse se produire dans l'air, supposé parfaitement isolant?*

Cherchons d'abord à évaluer en dynes par centimètre carré la pression d'un gaz à 5^{cm} de tension; supposons-nous placés à Paris. A 760^{mm}, soit 76^{cm}, la pression exercée sur un centimètre carré est de $1033,33 \times 981 = 1,0137$ mégadynes : pour 5^{cm} de mercure, nous aurons 667 dynes.

Or la pression électrostatique est donnée par la formule

$$(12) \qquad p = 2\pi\sigma^2 = 2\pi\left(\frac{VR}{4\pi R^2}\right)^2 = 2\pi\left(\frac{V}{4\pi R}\right)^2 = \frac{V^2}{8\pi R^2},$$

d'où

$$V = R\sqrt{8\pi p} = 0,1\sqrt{8\pi \times 667} = 12,95 \text{ U.E.S.} = 3885 \text{ volts.}$$

Quand les électrodes sont formées par des fils de platine, le potentiel peut être beaucoup plus faible.

12. *Une machine de Holtz développe, en tournant à sa vitesse maximum,* 80000 *volts; sa résistance intérieure est de* 800 *mégohms; quelle est l'intensité du courant produit dans un conducteur dont la résistance, quelle qu'elle soit, est évidemment négligeable?*

$$I = \frac{E}{R} = 0,0001 \text{ ampère.}$$

Cette machine donnera des étincelles de $3^{cm},2$ de longueur, d'après la Table de M. Mascart.

13. *Une machine à diélectrique de Carré charge en* 100 *tours de plateau un condensateur de* 0,1 *microfarad de capacité, au potentiel de* 2500 *volts; quel courant peut-elle alimenter à la vitesse de* 5 *tours par seconde et quelle énergie absorbe-t-elle?*

La charge de la batterie est donnée par l'équation

$$0,1 \times 10^{-6} \times 2500 = 250 \times 10^{-6} \text{ coulombs;}$$

le débit est donc de 250×10^{-8} par tour, en négligeant les pertes; il sera donc, par seconde, pour 5 tours, de

$$1250 \times 10^{-8} = 0,0000125 \text{ coulomb.}$$

Le courant a, par conséquent, 0,0000125 ampère ou 0,0125 milliampère d'intensité.

L'énergie

$$W = 1250 \times 10^{-8} \times 2500 = 0,0312 \text{ joule.}$$

La puissance du moteur à employer sera de

$$\frac{0,0312}{9,81} = 0^{kgm},00318 \text{ par seconde.}$$

Ce travail est théorique, car les déperditions entraînent pratiquement une dépense de travail plus considérable.

14. *En dix tours de plateau, une machine de Holtz fait*

donner une étincelle d'un millimètre à une jarre dont la capacité électrostatique est de 20000^{cm}; *quel travail a-t-on dépensé par tour et quel est le débit de la machine, quand elle fait* 15 *tours par seconde?*

Il faut 5490 volts pour donner entre deux boules de $2^{cm},2$ une étincelle de $0^{cm},1$; d'autre part, une capacité de 20000^{cm} équivaut à $\frac{20000}{9 \times 10^5} = 0,022$ microfarad : d'où

$$W = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2} \times 0,022 \times 10^{-6} \times \overline{5490}^2 = 0,33 \text{ joule},$$

ce qui fait par tour 0,033 joule.

De plus, pour 10 tours,

$$Q = CV = 0,022 \times 10^{-6} \times 5490 = 120,8 \times 10^{-6} \text{ coulombs}.$$

Pour 15 tours à la seconde, le débit sera de

$$120,8 \times 10^{-6} \times 1,5 = 0,00018 \text{ coulomb par seconde}.$$

CHAPITRE III.

CAPACITÉS.

1. *Une sphère conductrice isolée est reliée à l'un des pôles d'une pile de* 50 *éléments Daniell, dont l'autre pôle est à la Terre; quelle est sa charge en coulombs?*

Le potentiel du pôle, et par suite celui de la sphère, est égal à $50 \times 1,07 = 53,5$ volts; nous avons, par suite (*voir* p. 45),

$$53,5 \times \frac{1}{3 \times 10^2} \times R = Q \text{ U.E.S.} = \frac{Q}{3 \times 10^9} \text{ coulombs.}$$

2. *Deux sphères de laiton massives, de diamètres différents, sont chargées ensemble, alors qu'elles sont reliées par un fil long et fin; quelle est la charge respective de chacune d'elles, leurs poids étant dans le rapport de* 1 *à* 5?

Les rayons des sphères et, partant, leurs capacités sont dans le rapport de $\sqrt[3]{\frac{5}{1}} = 1,709$.

Elles sont au même potentiel.

Leurs charges sont donc dans le rapport de $\frac{1,709}{1}$.

3. *Deux sphères, de rayons* R′ *et* R″, *ont des charges* Q′ *et* Q″; *on les réunit par un fil long et fin. Que deviennent leur potentiel, leur charge et la densité superficielle à la surface de chacune d'elles?*

Les deux sphères sont au même potentiel V.

Elles se partagent leur charge totale $Q = Q' + Q''$ proportionnellement à leurs capacités R′ et R″.

Soient Q'_1 et Q''_1 leurs charges nouvelles.

$$Q'_1 + Q''_1 = Q,$$

$$Q'_1 = Q\frac{R'}{R'+R''}, \qquad Q''_1 = Q\frac{R''}{R'+R''},$$

$$V = \frac{Q'_1}{R'} = \frac{Q''_1}{R''} = \frac{Q}{R'+R''}.$$

Quant aux densités superficielles, nous avons

$$\sigma' = \frac{Q'_1}{4\pi R'^2} = \frac{Q}{4\pi R'(R'+R'')},$$

$$\sigma'' = \frac{Q'_2}{4\pi R''^2} = \frac{Q}{4\pi R''(R'+R'')},$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma''} = \frac{R''}{R'}.$$

4. *Un électrophore a un disque de* 25^{cm} *de diamètre; on peut estimer à* $0^{cm},01$ *la distance moyenne du disque au gâteau de résine. Calculer la capacité de l'électrophore.*

L'électricité superficielle du gâteau de résine en fait un condensateur, le disque formant collecteur. Nous pouvons donc écrire

$$(13)\quad \begin{cases} C = \dfrac{S}{4\pi e} = \dfrac{\pi . R^2}{4\pi 0,01} = 3900 \text{ U.E.S.} \\ \qquad = \dfrac{3900}{9\times 10^5} = 0,0043 \text{ microfarad.} \end{cases}$$

5. *Une des armatures d'un condensateur communique avec la Terre, l'autre est chargée de* 1000 *unités électrostatiques; la capacité* C *de l'instrument est de* 1 *microfarad; estimer en volts la différence de potentiel des armatures.*

$$Q = CE, \qquad E = \frac{Q}{C},$$

$$C = 9\times 10^5 \text{ U.E.S.},$$

$$E = \frac{1000}{9\times 10^5} = \frac{1}{9\times 10^2} \text{ U.E.S.} = \frac{3\times 10^2}{9\times 10^2} = \frac{1}{3} \text{ volt.}$$

6. *Une bouteille de Leyde a* 400^{cm^2} *de surface, et on la charge par une machine de Wimshurst donnant* 90000 *volts; quelle force f tend à percer le plateau de verre par centimètre carré? Ce verre a* $0^{cm},2$ *d'épaisseur.*

$$(12)\quad f = 2\pi\sigma^2 = 2\pi\left(\frac{Q}{S}\right)^2 = 2\pi\left(\frac{CV}{S}\right)^2 = 2\pi\left(\frac{kV}{4\pi e}\right)^2 = k^2\frac{V^2}{8\pi e^2}.$$

Dans cette équation, nous devons exprimer V en unités électrostatiques :

$$V = \frac{90000}{3\times 10^2} = 300 \text{ U.E.S.}$$

D'où, prenant $k = 6$,

$$f = 5213000 \text{ dynes par centimètre carré} = 5^{kg},3.$$

7. *On se propose de construire un condensateur, ayant une capacité d'un microfarad, avec des feuilles d'étain séparées par du papier paraffiné, dont le pouvoir inducteur spécifique est égal à* 1,8; *combien de lames faudra-t-il employer et quelle sera leur dimension, sachant que le papier employé a une épaisseur de* 1^{cm}?

Un microfarad vaut 9×10^5 U.E.S.

On aura donc

$$S = \frac{4\pi e\times 9\times 10^5}{1,8} = 62830^{cm^2}.$$

Il faudrait 61 feuilles ayant chacune une surface de 1030^{cm^2}; si elles étaient carrées elles auraient $32^{cm},1$ de côté.

En employant du papier de billet de banque extrêmement mince, on arriverait au même résultat avec 37 feuilles de $18^{cm},4$ sur $15^{cm},2$ de côté.

8. *M. Angot a employé comme étalon de capacité une sphère de rayon* R_1, *entourée par deux hémisphères de Magdebourg dont le rayon intérieur était* R_2. *On avait* $R_1 = 3^{cm},95$ *et* $R_2 = 6^{cm},2$. *Dire la capacité de cet étalon.*

$$C = \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1} = 10,9 \text{ U.E.S.} = \frac{10,9}{9\times 10^5} = \frac{1,21}{10^5} \text{ microfarad.}$$

C'est la capacité de la sphère intérieure.

9. *On argente les deux faces d'un ballon de verre ayant* 10^{cm} *de rayon et* 3^{cm} *d'épaisseur. Calculer la capacité de ce condensateur.*

$$C = \frac{6 \times 4\pi R^2}{4\pi e} = \frac{6R^2}{e} = 0,022 \text{ microfarad.}$$

10. *On peut faire un condensateur en prenant un tube de verre de Bohême très mince, en le remplissant d'acide sulfurique et en collant sur sa surface extérieure une feuille d'étain; quelle sera la capacité de l'instrument, si le tube a* 30^{cm} *de long,* 2^{cm} *de rayon extérieur et* 2^{cm} *d'épaisseur?*

$$(14) \quad \begin{cases} C = \dfrac{kl}{2\log\dfrac{R_1}{R}} = \dfrac{kl}{2 \times 2,3026 \times \log\dfrac{R_1}{R}} \\ = 95 \times 10^{-3} \text{ microfarad.} \end{cases}$$

11. *Un câble sous plomb a* 1000^{m} *de longueur; l'âme en cuivre, qui mesure* 1^{cm} *de diamètre, est enrobée dans du caoutchouc, dont le diamètre extérieur est de* 4^{cm}; *calculer la capacité de ce câble.*

$$C = \frac{2,05 \times 100000}{2 \times 2,3026 \times \log\dfrac{0,2}{0,05}}$$
$$= 0,118 \text{ microfarad.}$$

12. *Un câble sous-marin mesure* 4000^{km} *de longueur; l'âme de cuivre a* 33^{cm} *de rayon, et l'isolant a un rayon extérieur de* $1^{m},01$; *c'est de la gutta-percha d'excellente qualité. On le charge par une pile de* 100 *éléments Daniell : quelle charge prendra-t-il?*

Ce câble est un condensateur dont l'enveloppe en fer et l'eau de mer constituent l'armature extérieure. Sa capacité est égale à

$$\frac{3,4 \times 400000000}{2 \times 2,3026 \times \log\dfrac{1,10}{0,33}} = 628 \text{ microfarads.}$$

Sa charge sera

$$Q = CE = \frac{628}{10^6}\,107 = 0{,}0672 \text{ coulombs.}$$

13. *Déduire de la capacité kilométrique d'un câble la valeur du coefficient d'induction spécifique de son isolant.*

Il n'y a qu'à résoudre, pour k, l'équation donnée ci-dessus

$$k = \frac{2\log'\frac{R_1}{R}}{100000}\,C.$$

La valeur de C est donnée par $\frac{Q}{E}$.

14. *Un câble a une capacité* C *trop grande; on veut la réduire de moitié. Quel rayon x donnera-t-on à l'isolant, s'il avait primitivement une valeur* R_1, *l'âme ayant un rayon* R?

$$C = \frac{k}{2\log'\frac{R_1}{R}},$$

$$C_1 = \frac{C}{2} = \frac{k}{2\log'\frac{x}{R}},$$

$$2\log'\frac{R_1}{R} = \log'\frac{x}{R},$$

$$\log'\left(\frac{R_1}{R}\right)^2 = \log'\frac{x}{R},$$

$$x = \frac{R_1^2}{R}.$$

15. *Quelle est la force condensante d'un condensateur formé par deux sphères concentriques de rayon* R_1 *et* R?

La force condensante est égale au rapport $\frac{Q}{q}$ des charges

du collecteur, après et avant l'approche de la sphère extérieure, pour un même potentiel.

$$Q = V\frac{R_1 R}{R_1 - R},$$
$$q = VR.$$

La force condensante est donc égale à $\frac{R_1}{R_1 - R} = \frac{R_1}{e}$.

On voit sans peine qu'elle est la même, soit que l'on mette en communication avec la Terre la sphère intérieure ou la sphère extérieure.

16. *Un condensateur à lame d'air et armatures planes a une capacité* C; *l'épaisseur de la lame d'air est e. On introduit entre les deux plateaux une lame de fer, placée à égale distance de chacun d'eux, ayant* $\frac{1}{10}$ *de e d'épaisseur. Que devient la capacité du condensateur?*

$$C = \frac{S}{4\pi e}.$$

Soit e' la distance de la feuille de tôle aux armatures; nous avons formé deux condensateurs, dont chacun a une capacité $C' = \frac{S}{4\pi e'}$. La lame de fer a sur l'une de ses faces une charge $+Q'$, une charge $-Q'$ sur l'autre; elle est au potentiel V', alors que les armatures ont l'une un potentiel V, l'autre un potentiel zéro.

$$Q' = (V - V')\frac{S}{4\pi e'} = V'\frac{S}{4\pi e'} = V\frac{S}{4\pi e'}.$$

Donc

$$C' = \frac{S}{8\pi e'}$$

et

$$\frac{C'}{C} = \frac{e}{2e'} = \frac{e}{2\left(\frac{e - \frac{e}{10}}{2}\right)} = \frac{10}{9} = 1,11..$$

La capacité a augmenté comme si l'on avait rapproché les

armatures d'une quantité égale à l'épaisseur de la feuille de tôle.

17. *Une batterie de* 10 *jarres, dont chacune a une capacité de* 0,65 *microfarad, est chargée par une machine de Ramsden au potentiel de* 25000 *volts; quelle est l'énergie accumulée dans ce condensateur et quelle serait-elle, si les bouteilles étaient en cascade?*

(16) $W = \frac{1}{2} n C V^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 0,65 \times 10^{-15} \times \overline{25000}^2 \times 10^{16}$

en unités électromagnétiques et en ergs;

$$= 203125 \times 10^5 \text{ ergs} = \frac{203125}{981} \text{ kilogrammètres} = 208^{kgm}.$$

En cascade, on aurait eu

$$W = \frac{1}{2} \frac{C}{n} V^2 = 2^{kgm},08,$$

soit 100 fois moins d'énergie.

18. *Un condensateur sphérique étalon, à air, d'une capacité connue de* 0,006 *microfarad, est chargé par une source à potentiel constant; un autre condensateur est élevé au même potentiel par la même source. En déchargeant le premier à travers un galvanomètre balistique, on a observé une déviation en première impulsion de* 14°; *le second a donné, dans les mêmes conditions,* 18°. *Quelle est la capacité de ce condensateur?*

$$\frac{x}{0,006} = \frac{\sin 9^\circ}{\sin 7^\circ} = \frac{18}{14} = 1,28.$$

Pour transformer un galvanomètre ordinaire en Balistique, il suffit de supprimer l'amortissement et d'augmenter le moment d'inertie de l'équipage mobile, de façon à augmenter la durée de l'oscillation.

La méthode ci-dessus est défectueuse pour les appareils à diélectrique solide.

19. *Un condensateur étalon a une capacité indiquée* C *qu'il*

importe de contrôler; à cet effet, on le charge par une pile de 50 *éléments Daniell, et on le décharge à travers un galvanomètre balistique; la déviation est* δ. *Or la même source donne, à travers une résistance* R *comprenant le même galvanomètre, une déviation permanente* δ'. *Quelle est la capacité exacte du condensateur en* U.E.M.?

On a d'abord

$$Q = CV = \frac{H}{G}\frac{T}{\pi}\sin\frac{\delta}{2}.$$

Mais nous avons aussi

$$I = \frac{V}{R} = \frac{H}{G}\delta';$$

d'où

$$V = R\frac{H}{G}\delta.$$

On en déduit

$$C = \frac{T}{R}\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\pi\delta'} = \frac{T}{R}\frac{1}{\pi}\frac{\delta}{2\delta'}.$$

T est la durée d'une oscillation en secondes et R la résistance en U.E.M.; on n'oubliera pas que l'ohm est égal à 10^9 U.E.M. C sera exprimé en unités absolues de capacité; le farad vaut 10^{-9} U.E.M.

Cette méthode a été indiquée par M. F. Jenkin.

CHAPITRE IV.

CONSTANTES DES PILES.

1. *Calculer la force électromotrice d'un élément Daniell par la Table de MM. Ayrton et Perry.*

		volts
Cu	CuO, SO^3 (diss. sat.)....	+0,070
CuO, SO^3 (diss. sat.)	ZnO, SO^3 (diss. sat.)....	—0,095
ZnO, SO^3 (diss. sat.)	Zn.....	+0,430
Zn	Cu.....	+0,750
		1,155

Ce résultat est un peu trop fort.

2. *Même calcul pour la pile de Bunsen.*

		volts
Pt	AzO^5, HO concentré.....	+0,672
Az^5O, HO concentré	SO^3, HO dilué.....	+0,078
SO^3, HO dilué	Zn.....	+0,241
Zn	Pt.....	+0,981
		1,972

3. *Même calcul pour une pile formée de zinc, charbon et eau acidulée par l'acide sulfurique.*

		volts
Zn	C.....	+1,096
Zn	SO^3, HO.....	+0,238
C	SO^3, HO.....	+0,035
		1,369

Ces procédés de calcul ne fournissent que des résultats approchés, car ils ne tiennent aucun compte de la polarisation des éléments; mais ils sont néanmoins utiles pour les études de piles.

4. *Calculer la force électromotrice d'une pile de Volta dans laquelle on remplacerait le cuivre par du laiton.*

			volt
Le contact	Zn	Cu donne.....	0,750
Celui	Zn	Laiton ne donne que.....	0,679

La différence, égale à 0,071, est la fraction de volt perdue par la substitution du laiton au cuivre rouge.

5. *Calculer la force électromotrice d'un élément Daniell par les chaleurs dégagées dans les réactions qui s'y produisent.*

La dissolution du zinc dans l'acide sulfurique fournit de la chaleur et par suite de l'énergie, tandis que l'électrolyse du sulfate de cuivre en absorbe.

$32^{gr},5$ de zinc dégagent, en s'oxydant et en formant ZnO, SO^3, 53650 calories, soit, par gramme de zinc, 1650 calories.

D'autre part, 1 coulomb donne $0^{gr},000337$ de zinc; réciproquement, la combustion de cette quantité de zinc produit un coulomb.

Or, si nous appelons q la chaleur de formation d'un équivalent pour un corps dont ε est l'équivalent électrochimique, nous aurons

$$(27)\begin{cases} e = J\varepsilon q, \\ = 4,16 \times 10^7 \times 0,000337 \times 10 \times 1650 = 2,35 \times 10^8 \text{ U.E.M.} \\ = 2,35 \text{ volts.} \end{cases}$$

La décomposition du cuivre donne une force contre-électromotrice e', qu'on calculera de même en sachant que $31^{gr},7$ de cuivre sont renfermés dans un équivalent de CuO, SO^3, formé avec dégagement de 29600 calories : la combinaison de 1^{gr} de cuivre donne donc 933 calories.

D'où

$$e' = 1,31 \text{ volt.}$$

Donc

$$E = e - e' = 2,35 - 1,31 = 1,04 \text{ volt.}$$

6. *Calculer la force électromotrice théorique d'un élément Bunsen.*

Nous pouvons simplifier les calculs précédents en faisant la soustraction des quantités de chaleur mises en œuvre et en les rapportant aux équivalents.

	cal. gr.
Formation de ZnO, SO^3	+53650
Décomposition de $AzO^5 = AzO^2 + 3O$	— 6880
Différence	46770

$$E = 4,16 \times 0,0000104 \times 46770 = 2,02 \text{ volts.}$$

En effet, le produit εq de la formule (27) appliquée ci-dessus peut être remplacé par le produit de 0,0000104, équivalent électrochimique de l'hydrogène, par l'équivalent chimique du corps et par la chaleur de formation rapportée à l'unité de poids; or ces deux derniers facteurs sont renfermés dans le multiplicateur 46770.

On a par conséquent

$$E = 0,0000434 \times 46770.$$

Il n'y a donc qu'à multiplier par le facteur 0,0000434 le nombre de calories-grammes produites par la combinaison d'un équivalent des substances chimiques engagées dans la réaction pour avoir en volts la force électromotrice de l'élément.

Plus simplement encore, un volt correspond à 23000 calories-grammes.

7. *Calculer la force électromotrice d'une pile de Volta dans laquelle on remplacerait le zinc par du fer.*

	cal. gr.
Formation de FeO, SO_3	+47000
Décomposition de l'eau	—34500
	11500

$$E = 0,0000434 \times 11500 = 0,50 \text{ volt.}$$

8. *Quelle est la différence de potentiel vraie entre les pôles d'une pile Leclanché, de résistance intérieure égale à* 1,15 *ohm,*

dont les pôles sont réunis par un fil conjonctif de cuivre ayant 100^m *de longueur et* 2^{mm} *de diamètre?*

Ce fil a une résistance égale à 0,005 ohm par mètre, soit de 0,5 ohm par 100^m : c'est R.

La force électromotrice d'une pile Leclanché à circuit ouvert est de 1,45 volt : c'est E.

Nous avons donc

$$x = IR = \frac{ER}{R + r} = 0,44 \text{ volt.}$$

9. *Une pile de Volta est formée par deux plaques de zinc et de cuivre ayant chacune un décimètre carré de surface : le liquide excitateur est de l'eau acidulée par l'acide sulfurique, de densité* 1,0504; *quelle est la résistance intérieure de cet élément, quand les deux lames sont espacées de* 5^{cm} *et de* 10^{cm}?

$$r = 3,252 \times \frac{5}{100} = 0,16 \text{ ohm.}$$

Dans le second cas, la résistance est évidemment double.

10. *On se propose de calculer la résistance d'une pile de Bunsen de* 2^{cm} *de hauteur, composée :* 1° *d'un charbon cylindrique central de* 2^{cm} *de rayon;* 2° *d'un vase poreux ayant un rayon intérieur de* 3^{cm} *et une épaisseur de* 2^{cm} *et* 3° *d'un zinc cylindrique dont le rayon intérieur est de* $3^{cm},7$. *La pile est chargée d'acide azotique de densité* 1,185 *ayant le maximum de conductibilité et d'eau acidulée par l'acide sulfurique de densité* 1,1. *La résistance du vase poreux est d'à peu près* 126 *ohms-centimètres.*

On déduit des travaux de Smaasen que, pour un conducteur déterminé, le produit de sa résistance par sa capacité électrostatique est constant et égal à $\frac{\alpha}{4\pi}$, α étant la résistance spécifique de la substance.

Pour l'espace compris entre deux cylindres de rayons R_1

et R et de longueur l, la capacité C est connue et égale à $\frac{l}{2\log'\frac{R_1}{R}}$.

Nous avons par suite

$$x = \frac{\alpha}{2\pi l}\log'\frac{R_1}{R}.$$

Dans le cas proposé, nous écrirons

$$r = \frac{1}{2\pi l}\left[\alpha\log'\frac{R_1}{R} + \alpha'\log'\frac{R'_1}{R'} + \alpha''\log'\frac{R''_1}{R''}\right].$$

Nous avons

$$\alpha = 1,287, \qquad \alpha' = 12,6, \qquad \alpha'' = 1,78,$$
$$\frac{R_1}{R} = 1,5, \qquad \frac{R'_1}{R'} = 1,06, \qquad \frac{R''_1}{R''} = 1,23.$$

Tous calculs faits, il vient

$$r = 0,057 \text{ ohm}.$$

Ce calcul ne donne évidemment qu'un résultat approché et il est toujours préférable de mesurer directement la résistance intérieure d'un élément. Toutefois, il nous a paru utile de consigner cette méthode dans ce livre, car nous croyons qu'elle peut rendre service pour évaluer rapidement la résistance d'un élément quelconque.

11. *Pour mesurer la résistance intérieure d'un élément de pile* P, *on lui oppose un élément de moindre force électromotrice p, et l'on cherche deux positions* B *et* B' *d'un curseur sur le fil* AC *réduisant au zéro le galvanomètre* G; *on a trouvé une première fois* $m = 52$ *et* $n = 18$, *une seconde fois* $m' = 73$ *et* $n' = 26$. *Déterminer cette résistance r : la résistance des fils du circuit* ABC *est négligeable* (*fig.* 17).

Si nous appelons E et e les forces électromotrices des éléments P et p, nous aurons, attendu que l'intensité du courant

est nulle en ApGB,

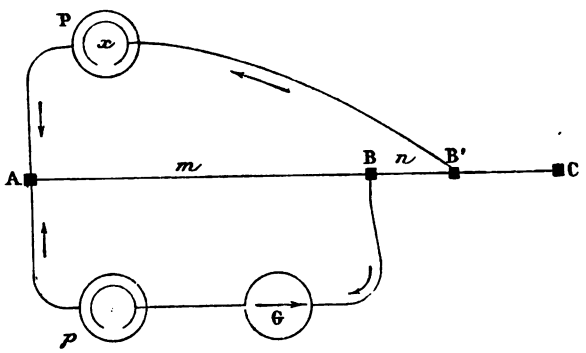
$$E = (r + m + n)I, \qquad e = mI,$$
$$E = (r + m' + n')I', \qquad e = m'I',$$

$$\frac{E}{e} = \frac{r + m + n}{m} = \frac{r + m' + n'}{m'},$$

$$\frac{r + n}{m} + 1 = \frac{r + n'}{m'} + 1,$$

$$r = \frac{m'n - n'm}{m - m'} = 1,81 \text{ ohm.}$$

Fig. 17.



12. *Pour mesurer la résistance intérieure d'un élément, Sir W. Thomson introduit dans le circuit de la pile* P *un rhéocorde r (fig. 18) et un galvanomètre* G; *celui-ci marque une déviation* δ. *On jette alors un point* AB *de résistance* S, *en joignant* A *et* B *par un fil sans résistance sensible, renfermant une boîte de résistances* S; *la déviation du galvanomètre diminue et devient* δ'; *on la ramène à sa valeur primitive* δ *en diminuant la longueur du fil au rhéocorde r. Une pile de Poggendorff de* 20^{cm} *de hauteur donne les résultats suivants :*

b = première longueur du rhéocorde....	100^{cm}
b' = deuxième »	62^{cm}
S = résistance du shunt.....	1 ohm.
G = résistance du galvanomètre.....	0,65 ohm. 112^{cm} de fil.

On a dans le premier cas

$$I = \frac{E}{r + G + b};$$

dans le second

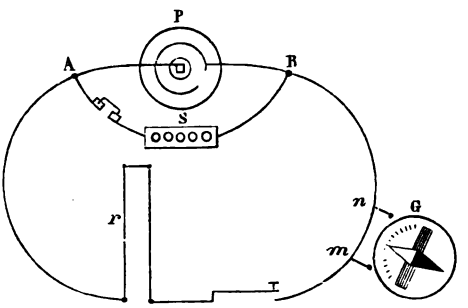
$$I = \frac{ES}{r(S + b' + G) + S(b' + G)};$$

d'où, en égalant et réduisant

$$r = S\,\frac{b - b'}{b' + G} = 0,212 \text{ ohm.}$$

Le seul inconvénient de cette méthode est d'évaluer G en

Fig. 18.



fonction de la longueur du fil du rhéocorde. Quand le galvanomètre est peu résistant, on néglige G.

13. *Une pile de dix éléments Reynier lance son courant dans un circuit formé d'un galvanomètre de* 2,25 *ohms de résistance et d'un rhéostat. On obtient une déviation de* 15° *avec* 300 *ohms au rhéostat et une déviation de* 7°,5 *avec* 603 *ohms; quelle est la résistance d'un élément?*

$$I = \frac{E}{r + G + R},$$

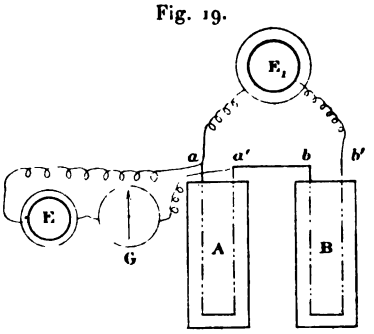
$$\frac{I}{2} = \frac{E}{r + G + R'},$$

$$r = R' - 2R - G = 0,75 \text{ ohm.}$$

Par élément, nous aurons 0,075 ohm.

14. *Deux boîtes de résistances* A *et* B (*fig.* 19), *de* 10000 *ohms chacune, sont introduites dans le circuit d'un étalon Post-Office et disposées à la suite. Une dérivation, prise sur la boîte* A, *renferme un électromètre de Lippmann et une pile* P *de Smée dont on veut mesurer la force électromotrice* E. *A cet*

Fig. 19.



effet, toutes les clefs de la boîte B *sont d'abord enlevées, alors qu'aucune ne manque dans la boîte* A; *puis, la pile est mise en opposition avec l'étalon : il se produit une déviation à l'électromètre. Mais on constate qu'en retirant de* A *les clefs de* 4800 *ohms, et en les transportant en* B, *à leurs places respectives, on réduit l'électromètre au zéro. Quelle est la force électromotrice de* P?

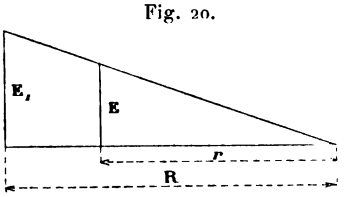
La *fig.* 20 montre que nous avons

$$\frac{E}{E_1} = \frac{r}{R};$$

d'où

$$E = 1,074 \times \frac{4800}{10000} = 0,515 \text{ volt.}$$

Fig. 20.

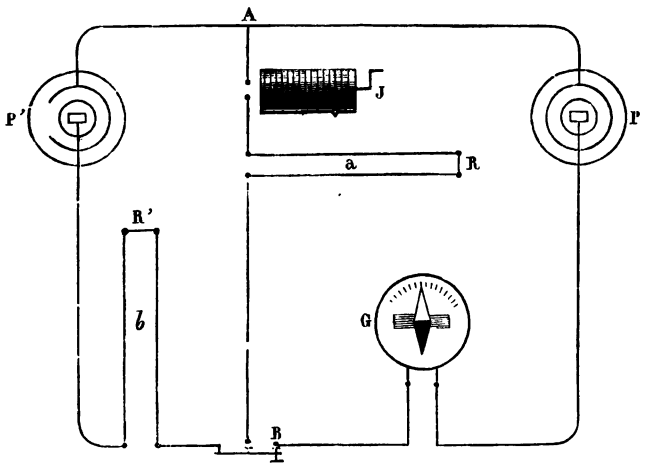


Cette élégante méthode est due à M. Bouty : on peut placer

en E_1 deux, voire même trois étalons. La substitution des clefs maintient la constance de R; d'autre part, r est négligeable devant R.

15. *La méthode indiquée par MM. Poggendorff et Boscha, pour mesurer la force électromotrice d'une pile, consiste à opposer l'élément* P (*fig.* 21) *à l'étalon* P′ *dans le cir-*

Fig. 21.



cuit APGBR′P′A; *mais un pont est jeté entre* A *et* B *par un circuit qui comprend un rhéostat* J *et un rhéocorde* R. *Les deux éléments étant opposés, on peut toujours, en faisant varier la résistance du rhéostat, amener à zéro l'aiguille du galvanomètre* G; *mais qu'on introduise alors par le rhéocorde* R *une résistance a dans le circuit dérivé* ARB, *il faudra, pour ramener l'aiguille au zéro, augmenter de b la résistance du second circuit* AP′R′B. *En opposant deux étalons Daniell à un élément Leclanché, on trouve* $a = 100$ *et* $b = 48$; *en déduire la force électromotrice du Leclanché.*

Nous avons

$E = IR$ et $E = I'(R + a)$ en APBRA,
$E_1 = I(R + r_1)$, $E_1 = I'(R + a + b + r_1)$ en ARBR′P′A;

attendu que l'intensité du courant est nulle dans la branche APB renfermant le galvanomètre.

On en déduit

$$\frac{E}{E_1} = \frac{R}{R + r_1} = \frac{R + a}{R + a + b + r_1} = \frac{a}{a + b} = 0,72.$$

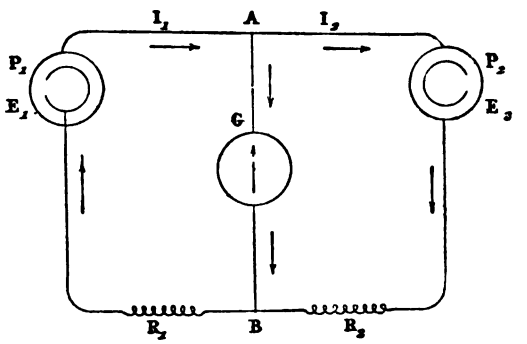
Comme $E_1 = 2 \times 1,07 = 2,14$, nous avons

$$E = 1,54 \text{ volt.}$$

Il faut toujours que la force électromotrice de l'étalon soit supérieure à celle de la pile étudiée, car $\frac{a}{a+b}$ est plus petit que 1.

16. *Deux piles* P_1 *et* P_2 (*fig.* 22) *sont réunies par leurs pôles*

Fig. 22.



de nom contraire; soient I_1, E_1, R_1, I_2, E_2 *les intensités des courants, force électromotrice des piles et résistance des conducteurs dans les circuits* AP_1B *et* AP_2B *et* I *l'intensité en* AB. *On ajuste* R_2 *de telle manière que le galvanomètre* G *marque zéro. Déduire le rapport* $\frac{E_1}{E_2}$ *de la mesure de* R_1 *et* R_2.

La première loi de Kirchhoff nous donne

$$I_1 = I + I_2;$$

de plus, nous avons, dans les circuits ABP_1A et ABP_2A,

$$I_1R_1 + GI = E_1,$$
$$I_2R_2 - GI = E_2;$$

d'où

$$I_2 = \frac{E_2 + GI}{R_2}$$

et

$$R_1(I + I_2) + GI = E.$$

Par suite,

$$R_1\left(I + \frac{E_2 + GI}{R_2}\right) + GI = E_1,$$

$$I = \frac{E_2R_2 - E_1R_1}{G(R_1 + R_2) + R_1R_2};$$

mais

$$I = 0,$$

donc

$$\frac{E}{E_1} = \frac{R_1}{R_2}.$$

C'est la méthode de Lumsden; comme celle de Poggendorff et Bosscha, elle a l'avantage de ne pas nécessiter la détermination préalable, toujours délicate, de la résistance intérieure des éléments.

17. *Quel est le débit maximum d'énergie d'une pile de 60 éléments Bunsen?*

Le courant a une intensité maximum lorsque la résistance extérieure du circuit est égale à la résistance intérieure de l'élément.

$$I_m = \frac{E}{2r}.$$

Mais alors la différence de potentiel aux bornes n'est plus que la moitié de E.

Donc

$$W = \frac{E}{2} I_m = \frac{E^2}{4r}.$$

Dans le cas proposé

$$W = \frac{(60 \times 1,9)^2}{4 \times 0,25 \times 60} = 216 \text{ watts},$$
$$= 216 \text{ joules par seconde.}$$

En kilogrammètres, $W = \frac{216}{9,81} = 22^{kgm}$.

18. *Quel est le rendement d'une pile de Daniell fermée sur une résistance extérieure de 2 ohms?*

Le rendement ρ est le rapport du travail extérieur fourni par la pile à son travail disponible.

$$\rho = \frac{I^2 R}{EI} = \frac{IR}{E} = \frac{R}{R + r} = \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} = \frac{1}{1 + \frac{2,8}{2}} = 0,41.$$

Le maximum, égal à 0,5, eût été obtenu si l'on avait eu $R = r$.

19. *Le zinc coûte* $0^{fr},60$ *le kilogramme; à combien revient le cheval-heure produit par une pile consommant rigoureusement la quantité théorique et donnant une différence de potentiel de* 1,54 *volt? On négligera le prix du liquide excitateur et du liquide dépolarisant.*

Le travail total développé par la pile pendant un temps t est

$$\mathfrak{T} = EIt.$$

Soit p l'équivalent électrochimique du zinc et P le poids du zinc consumé.

$$P = pIt.$$

Il vient donc

$$P = \mathfrak{T}\frac{p}{E};$$

or

$$\mathfrak{T} = 736 \times 3600 \text{ joules},$$
$$p = 0,000337^{gr}.$$

Donc

$$P = \frac{736 \times 3600 \times 0,000337}{1,54} = \frac{886}{1,54} = 576^{gr},$$

ce qui fait une dépense par cheval-heure de

$$0,576 \times 0,60 = 0^{fr},35.$$

20. *Quel est le prix du cheval-heure produit par une pile de Daniell dont le rendement est de* 0,70? *On comptera l'acide sulfurique à* $0^{fr},10$, *le sulfate de cuivre à* $0^{fr},42$ *et le cuivre déposé à* $0^{fr},70$; *le sulfate de zinc vaut* $0^{fr},10$ *environ.*

Le zinc consumé pèse $\frac{886}{1,07} = 828^{gr}$.

Son prix est de $0,828 \times 0,60 = 0^{fr},50$.

La formule de la réaction chimique étant

$$Zn + SO^3, HO = ZnO, SO^3 + H,$$

on peut calculer le poids de sulfate de zinc produit, car l'équivalent du zinc est 32,5, alors que celui du sulfate est 72,5; par suite, 828^{gr} de zinc donnent $1^{kg},822$ de sulfate valant $0^{fr},18$.

L'acide employé pèse $1822 \times \frac{49}{72,5} = 1221^{gr}$ dont le prix est de $0^{fr},13$.

Mais

$$H + CuO, SO^3 = Cu + SO^3, HO.$$

Un équivalent de zinc se consume donc exactement pour un équivalent de cuivre déposé; or l'équivalent du cuivre est 31,75. Il se déposera par suite $828 \times \frac{31,75}{32,50} = 812^{gr}$ de cuivre qui valent $0^{fr},57$.

Enfin le sulfate de cuivre dépensé se déduit sans peine du rapport des équivalents; mais nous donnerons à ce sel la formule $CuO, SO^3 + 5HO$, dont l'équivalent est 124,5 et nous trouvons ainsi $812 \times \frac{124,5}{31,75} = 3^{kg},183$ de sulfate dont la valeur est de $1^{fr},34$.

En somme, nous avons

Zn.	SO^3, HO.	CuO, SO^3.	ZnO, SO^3.	Cu.
+0,50	+0,13	+1,34	—0,18	—0,57 = $1^{fr},22$.

En tenant compte du rendement, le prix du cheval-heure ressort conséquemment à $1^{fr},75$.

En réalité, les réactions parasites, les déchets, les frais d'achat, d'entretien et de manipulation élèvent dans la pratique cette somme à près de 3^{fr}.

21. *Y aurait-il avantage à substituer au zinc du fer à* $0^{fr},30$ *le kilogramme dans une pile de Daniell?*

Calculons d'abord la perte de potentiel produite par la substitution du fer au zinc.

La formation de FeO, SO^3 ne donne que 47000 calories au lieu de 53650 que donne la formation de ZnO, SO^3; la perte au voltage sera donc de $\frac{6650}{23000} = 0,29$ volt; la pile au fer n'aurait donc que $1,07 - 0,29 = 0,78$ volt.

Le poids de fer dépensé par cheval-heure sera par conséquent

$$P = \frac{736 \times 3600 \times 0,0002907}{0,78} = 985^{gr}.$$

La dépense ne serait par suite que de $0^{fr},20$ au lieu de $0^{fr},35$.

Mais, en pratique, une pile de Daniell au fer n'a guère que 0,5 volt de force électromotrice; l'avantage est donc moindre.

Il faut du reste observer que, par suite de cette diminution de force électromotrice, on se verrait obligé de multiplier le nombre des éléments; les dépenses de sulfate de cuivre et d'acide sulfurique croîtraient proportionnellement et absorberaient largement le léger bénéfice résultant de l'emploi du fer.

22. *A combien d'éléments Daniell équivaut une dynamo donnant* 600 *volts entre ses bornes et ayant une résistance totale de* 26 *ohms?*

Cherchons à obtenir même force électromotrice en couplant n éléments en série, et même résistance totale en groupant m séries en batterie;

$$n = \frac{600}{1,07} = 560.$$

D'autre part, nous aurons,

$$\frac{nr}{m} = 26.$$

Faisons $r = 2$:

$$m = 43.$$

Donc

$$N = mn = 24080 \text{ éléments.}$$

CHAPITRE V.

COUPLAGE DES PILES [1].

1. *Une pile, composée de* 60 *éléments Poggendorff, assemblés en batterie par deux séries de* 30, *envoie son courant dans un conducteur de* 12 *ohms de résistance, renfermant un récepteur de* 3,5 *ohms et rattaché à la terre par deux prises de contact dont la résistance est de* 19 *ohms. Quelle est l'intensité du courant, sachant que chaque élément a une résistance de* 0,25 *ohms.*

La force électromotrice de chaque série est égale à 30E : c'est la force électromotrice de la batterie. La résistance de chaque série est $30r$; la résistance de la batterie est moitié moindre.

Il vient donc

$$I = \frac{30E}{15r + \Sigma R} = \frac{30 \times 2,03}{15 \times 0,25 + 12 + 3,5 + 19} = 1,59 \text{ ampère.}$$

2. *On veut remplacer* 3 *éléments Bunsen, ayant une résistance intérieure de* 0,12 *ohm par quelques daniells, couplés de la manière qu'il faudra; quelle surface de zinc conviendra-t-il de donner à ces derniers éléments, sachant qu'à égalité de surface leur résistance est vingt fois plus grande?*

La force électromotrice de 3 bunsens est de 5,4 volts; il faut donc leur substituer au moins 5 daniells en série. En grou-

[1] On résout de même les questions du couplage des machines magnétos et dynamos à excitation séparée donnant un courant continu.

pant 34 séries, on aurait même résistance intérieure. La surface de zinc en daniells devrait être par suite $\frac{170}{3} = 57$ fois plus grande qu'en bunsens pour donner le même résultat.

Il est aisé de vérifier en effet que nous avons, pour les résistances intérieures,

$$3 \times 0,12 = \frac{5 \times 20 \times 0,12}{x},$$
$$x = 34.$$

3. *Une pile de force électromotrice* $E = 1,48$ *volt a une résistance intérieure* $r = 1,3$ *ohm et elle est fermée par un fil conjonctif de* 2 *ohms de résistance* R; *quelle est la différence de potentiel efficace* V *aux pôles?*

$$I = \frac{E}{r + R},$$
$$V = IR = E\frac{R}{r + R} = E\frac{1}{\frac{r}{R} + 1} = 0,9 \text{ volt.}$$

La force électromotrice E est la différence de potentiel des pôles isolés : c'est celle qui se mesure à circuit ouvert.

4. *On dispose de neuf piles Bunsen et d'un élément Leclanché : y a-t-il intérêt à introduire ce couple dans une série formée de ces couples Bunsen, la résistance du circuit extérieur étant de* 10 *ohms?*

Pour qu'il y ait intérêt à introduire un couple dans une série, il faut que sa force électromotrice soit supérieure à la chute de potentiel produite par sa résistance intérieure.

Or la chute de potentiel sur l'élément Leclanché considéré comme inactif est égale à

$$9E\frac{r'}{R + 9r'} = 9 \times 1,90\frac{1,1}{10 + 9 \times 0,1} = 1,72.$$

La force électromotrice de l'élément Leclanché est, d'autre part, égale à 1,45.

Il n'y a donc pas intérêt à introduire cette pile dans la

série; mais il suffirait que la résistance R extérieure devînt égale à 12 ohms pour qu'on pût conseiller l'opération.

5. *Une pile de résistance x est fermée sur un circuit de résistance* R *égale à* 5 *ohms et l'on a mesuré entre ses bornes une force électromotrice efficace* V *égale à* 1,35 *volt; la pile étant ouverte, on a trouvé que sa force électromotrice* E *égalait* 1,52 *volt, dans les mêmes conditions de polarisation. En déduire la valeur de x.*

$$V = E\frac{R}{R+x},$$

$$\frac{E}{V} = \frac{R+x}{R},$$

$$\frac{E-V}{V} = \frac{R+x}{R} - 1 = \frac{x}{R},$$

$$x = R\frac{E-V}{V} = 5\,\frac{0,17}{1,35} = 0,63 \text{ ohm.}$$

Ce mode est très pratique quand on peut procéder facilement à la mesure de E par un électromètre ou un galvanomètre à très grande résistance constituant un voltmètre exact.

6. *On monte* $N = 50$ *éléments Bunsen en* $m = 5$ *séries de* $n = 10$ *éléments chacune, qu'on associe en batterie; quelle est l'intensité du courant, la résistance du circuit extérieur étant de* 12 *ohms?*

$$I = \frac{nE}{R + \frac{nr}{m}} = \frac{nmE}{mR + nr} = \frac{NnE}{NR + n^2 r}$$

$$= \frac{50 \times 10 \times 1,9}{50 \times 12 + 100 \times 0,1} = 1,55 \text{ ampère.}$$

On sait que I devient maximum lorsque $R = \frac{nr}{m}$, c'est-à-dire lorsque la résistance du circuit extérieur est égale à celle de la pile. On a, en effet, en prenant la dérivée par rapport à n,

$$NE(NR + n^2 r) - 2n^2 NEr = 0,$$

d'où

$$R = \frac{n^2 r}{N}.$$

Il en résulte que l'intensité est maximum lorsque la différence de potentiel aux bornes de la pile est égale à la moitié de sa force électromotrice.

7. *Quel est le courant le plus intense que l'on puisse produire sur une résistance de* 5 *ohms, quand on dispose d'une pile de* 80 *éléments Poggendorff au bichromate?*

$$\frac{n^2 r}{N} = R,$$

$$n = \sqrt{\frac{RN}{r}} = \sqrt{\frac{5 \times 80}{0,25}} = 40.$$

Il faut donc former deux séries de 40 éléments et les associer en quantité; on aura

$$I = \frac{80 \times 2,01}{2 \times 5 + 40 \times 0,25} = \frac{160,8}{20} = 8,04 \text{ ampères.}$$

8. *Un médecin, possédant une batterie d'éléments Leclanché, veut se servir d'un courant de* 30 *milliampères sur une résistance qu'il évalue à* 2000 *ohms; combien doit-il assembler d'éléments?*

On ne peut songer qu'à un assemblage en série, vu la grande résistance extérieure et la faible résistance relative des éléments Leclanché; nous aurons donc

$$I = \frac{xE}{R + xr},$$

$$x = \frac{RI}{E - rI} = \frac{2000 \times 0,03}{1,45 - 1,1 \times 0,03} = 53 \text{ éléments.}$$

9. *On a besoin d'un courant de* 8 *ampères dans un circuit de* 0,2 *ohm de résistance; combien faut-il acheter d'éléments Reynier et comment les assemblera-t-on?*

Il faut tout d'abord chercher à égaler les résistances inté-

rieure et extérieure; pour n groupes de m éléments, on a

$$\frac{n \times 0,07}{m} = 0,2.$$

La différence de potentiel aux bornes sera

$$IR = 8 \times 0,2 = 1,6;$$

ce doit être la moitié de la force électromotrice de la pile, ce qui donne

$$\tfrac{1}{2} n \times 1,5 = 1,6,$$

$$n = 2,1.$$

Prenons n égal à 2; dès lors

$$m = \frac{2,1 \times 0,07}{0,2} = 1.$$

Deux éléments en série suffisent en effet, et ils donnent une intensité de

$$\frac{2 \times 1,5}{0,2 + 0,07 \times 2} = 8,6 \text{ ampères.}$$

10. *Calculer la puissance mécanique de* 50 *éléments Poggendorff montés en série ou en batterie?*

L'énergie disponible d'une pile est $W = EI$ par seconde; mais la résistance intérieure des couples absorbe un certain travail, qui vient en décompte de l'énergie totale.

Nous aurons donc, dans l'expression du travail $\mathfrak{T}$ disponible dans le circuit extérieur d'un seul élément, après décompte de l'énergie transformée en chaleur dans la pile elle-même,

$$\mathfrak{T} = EI - rI^2 = EI\left(1 - \frac{rI}{E}\right);$$

le rendement devient

$$\rho = \frac{\mathfrak{T}}{W} = \frac{\mathfrak{T}}{EI} = 1 - \frac{rI}{E}.$$

Or $\frac{E}{r}$ est l'intensité d'un courant qui ne surmonterait point d'autre résistance que celle de la pile et qui ne produirait, par

suite, aucun travail extérieur. Soit I_0 l'intensité de ce courant correspondant à un travail nul à l'extérieur de la source.

Nous pourrons écrire

$$\mathfrak{E} = EI\left(1 - \frac{I}{I_0}\right) = \frac{EI}{I_0}(I_0 - I),$$

et

$$\rho = 1 - \frac{I}{I_0}.$$

La valeur maximum de $\mathfrak{E}$ se calcule dès lors aisément : puisque la somme des deux facteurs I et $(I_0 - I)$ est constante, le maximum du produit $I(I_0 - I)$ correspond à $I = I_0 - I$ ou $I_0 = 2I$.

Dans ce cas, la résistance extérieure doit être égale à la résistance intérieure, et nous avons

$$\rho = \tfrac{1}{2};$$

de plus,

$$\mathfrak{E} = r\frac{I_0^2}{4} = \frac{r}{4}\frac{E^2}{r^2} = \frac{E^2}{4r};$$

c'est la valeur maximum du travail disponible.

Pour N éléments assemblés en série,

$$\mathfrak{E} = \frac{N^2E^2}{4Nr} = \frac{NE^2}{4r} = \frac{50 \times \overline{1,80}^2}{4 \times 0,25} = 162 \text{ joules.}$$

La puissance de la batterie sera par suite de

$$\frac{162}{736} = 0,22 \text{ cheval-vapeur.}$$

Cette puissance disponible doit être indépendante de l'arrangement des éléments; en effet, pour m séries de n, nous trouverons encore

$$\mathfrak{E} = \frac{n^2E^2}{4\frac{n}{m}r} = \frac{NE^2}{4r}.$$

11. *Combien faut-il brûler de zinc dans une pile de Bunsen pour produire* 75^{kgm} *par seconde pendant une heure, c'est-*

à-dire pour développer la puissance d'un cheval pendant une heure?

L'équivalent électrochimique du zinc est égal à $0^{mgr},337$; c'est le poids de ce métal dont la combinaison produit 1 coulomb. Nous n'avons donc qu'à chercher combien de coulombs sont nécessaires par cheval-heure.

Or on sait que

$$\frac{EQ}{9,81} = 270000.$$

Donc

$$Q = \frac{270000 \times 9,81}{1,9} = 1394053 \text{ coulombs.}$$

Le poids de zinc à brûler sera égal à

$$1394053 \times 0^{mgr},337 = 470^{gr}.$$

Il y a intérêt évidemment à employer des piles à potentiel élevé : une pile de Daniell consomme deux fois plus de zinc qu'une pile de Bunsen.

12. *Une pile de Daniell, de* 2,8 *ohms de résistance, donne un courant de* 0,22 *ampère dans un circuit de* 2 *ohms de résistance; on veut décupler ce courant; combien prendra-t-on d'éléments et comment faudra-t-il les grouper?*

La question admet une solution simple; combien d'éléments Daniell donneront un courant de 2,2 ampères dans une résistance de 2 ohms? C'est le problème n° 9.

$$\frac{n \times 2,80}{m} = 2,$$

$$\tfrac{1}{2}(n \times 1,07) = 2,2 \times 2,$$

$$n = 8 \text{ éléments,}$$

$$m = 11 \text{ groupes.}$$

Il faut donc 88 éléments, pour décupler le courant d'un élément, résultat curieux qui est dû à la faible résistance du circuit extérieur.

13. *Une pile de* 10 *éléments Bunsen, de* 200^{mm} *de hauteur,*

est montée en série et placée dans un circuit de 2 ohms de résistance; n'y a-t-il pas moyen de faire un meilleur couplage des éléments, au point de vue du travail produit dans le circuit extérieur, sachant qu'on n'a besoin dans ce circuit que de 4 ampères?

Le montage en série donnerait un courant beaucoup trop intense, car

$$I = \frac{10 \times 1,9}{10 \times 0,10 + 2} = 6,33 \text{ ampères.}$$

Le travail dépensé dans le circuit extérieur serait alors égal à

$$\overline{6,33}^2 \times 2 = 80 \text{ joules par seconde.}$$

Avec 4 ampères, ce travail ne serait que de 32 joules, soit 2,5 fois moindre.

Pour n'avoir que 4 ampères, il conviendrait de grouper les N éléments en m séries de n éléments chacune, de façon que

$$\frac{nE}{\frac{nr}{m} + R} = 4,$$

ce qui donne

$$nmE = 4nr + 4mR = NE.$$

Or

$$nm = N.$$

Il vient donc

$$NE = 4nr + 4\frac{N}{n}R,$$

$$nNE = 4n^2r + 4NR,$$

$$4n^2r - nNE + 4NR = 0,$$

$$n = \frac{NE \pm \sqrt{N^2E^2 - 64NRr}}{8r} = \frac{19 \pm 15,26}{0,8}.$$

La seule solution acceptable est $n = 4,7$: or, si l'on prend deux groupes de 5 éléments en série, l'intensité donnée par couplage est de 4,22 ampères, ce qui répond assez bien à la question.

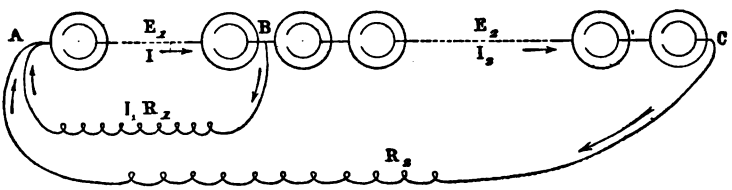
Le travail extérieur sera égal à 35,6 joules par seconde.

On économise donc 44,4 watts sur la puissance nécessaire pour entretenir ce courant dans la disposition précédente.

14. *Une pile d'éléments Bunsen, en nombre illimité, mais suffisant, est destinée à alimenter deux circuits de résistance* $R_1 = 3$ *ohms et* $R_2 = 10$ *ohms; comment reliera-t-on ces deux circuits aux éléments pour avoir une même intensité de* 2 *ampères dans chacun d'eux?*

La disposition à adopter est celle de la *fig.* 23. On montera

Fig. 23.



la pile en deux sections AB et BC, la première ne desservant qu'un seul circuit, le second circuit les renfermant toutes deux.

Nous appellerons E_1 la force électromotrice de la première section et E_2 celle de la seconde; r_1 et r_2 leurs résistances intérieures; I_1 et I_2 les intensités des courants dans les deux circuits dérivés; R_1 et R_2 leurs résistances, et enfin I l'intensité du courant principal dans la première section.

On peut écrire

$$I = I_1 + I_2,$$
$$E_1 = I r_1 + I_1 R_1,$$
$$E_1 + E_2 = I r_1 + I_2 (r_2 + R_2),$$
$$E_2 = I_1 (R_2 - R_1 + r_2).$$

Mais on veut que

$$I_1 = I_2;$$

les équations se simplifient donc et deviennent

$$I = 2 I_1,$$
$$E_2 = I_1 (R_2 - R_1 + r_2),$$
$$E_1 = I_1 (R_1 + 2 r_1).$$

Or

$$E_2 = n_2 \times 1,90 = 2(7 + n_2 \times 0,10),$$

d'où $n_2 = 8,3$, et

$$E_1 = n_1 \times 1,90 = 2(3 + 2n_1 \times 0,10),$$

ce qui donne $n_1 = 4$.

Prenons 9 pour 8,3; la pile comptera par suite 13 éléments, montés en deux sections de 9 et de 4 éléments mis en série.

15. *Comparer le rendement et le travail extérieur d'une pile de Daniell de 40 éléments, couplés en une seule série ou bien par 4 groupes de 10 en série, sur une résistance extérieure de 10 ohms?*

Dans le premier cas,

$$\rho_1 = \frac{I^2R}{NEI} = \frac{IR}{NE} = \frac{R}{R + Nr} = \frac{1}{1 + N\frac{r}{R}} = \frac{1}{12,2} = 0,082.$$

Dans le second,

$$\rho_2 = \frac{I^2R}{nEI} = \frac{IR}{nE} = \frac{R}{R + \frac{nr}{m}} = \frac{1}{1 + \frac{n}{m}\frac{r}{R}} = 0,588.$$

Le rendement est donc bien supérieur dans ce mode de couplage; mais le travail disponible, c'est-à-dire la puissance, est moindre. On a, en effet,

$$\mathfrak{E}_1 = NEI = \frac{N^2E^2}{R + Nr} = 48 \text{ watts},$$

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{n^2E^2}{R + \frac{n}{m}r} = 21 \text{ watts}.$$

CHAPITRE VI.

ACCUMULATEURS.

1. *Une dynamo donnant* 50 *volts et* 20 *ampères doit être employée à charger* 40 *accumulateurs Planté, dont chaque élément renferme* 1600^{gr} *de plomb; quel temps faudra-t-il pour la charger?*

La force électromotrice d'un élément peut monter à 2,5 volts à la fin de la charge : on devra donc accoupler au plus 20 éléments en séries et l'on fera mieux de former deux groupes de 13 et un de 14 en série, qu'on assemblera en batterie. Chaque série recevra donc un courant de 6 ampères.

La capacité d'un élément est de

$$36360 \times 1,6 = 58176 \text{ coulombs} = 16 \text{ ampères-heure};$$

la charge devra donc durer au moins trois heures, en supposant qu'il n'y ait aucune perte.

2. *Quel travail faut-il dépenser pour charger une batterie de* 50 *accumulateurs* E.P.S. (*Electric Power Storage*), *renfermant* 30^{kg} *de plomb par élément; la charge a été opérée sous le potentiel constant de* 1,86 *volt par accumulateur.*

Le travail à dépenser est égal à EIt; E est constant, mais I ne l'est pas : nous écrirons donc

$$W = E\Sigma It = EQ,$$

Q étant la quantité totale d'électricité à fournir.

Or on peut estimer à 19000 coulombs la capacité du kilo-

gramme de plaques; il faudra donc fournir

$$19000 \times 50 \times 30 = 285 \times 10^6 \text{ coulombs.}$$

Le travail sera par conséquent

$$W = 1,86 \times 285 \times 10^6 = 530 \times 10^6 \text{ joules}$$
$$= \frac{530 \times 10^6}{9,81} = 54 \times 10^7 \text{ kilogrammètres.}$$

Nous n'avons pas exagéré nos hypothèses en évaluant la capacité à 19000 coulombs; cela ne fait que 5,3 ampères-heure par kilogramme de plomb.

3. *Un accumulateur a été chargé pendant vingt-quatre heures et les variations de force électromotrice rapportées aux temps de charge sont représentées par la courbe* AB *de la fig.* 24; *on l'a déchargé aussitôt après et la courbe* BC *montre comment s'est opérée, en fonction du temps, la chute de potentiel jusqu'à* 1,85 *volt. Le courant de charge a été d'une intensité constante de* 3 *ampères, et le courant de décharge a gardé une intensité moyenne de* 5 *ampères. Quel est le rendement de cet accumulateur?*

D'une manière générale, l'énergie emmagasinée dans la charge est égale à $\int_0^T EI\,dT$, E étant la force contre-électromotrice développée par les réactions, I l'intensité du courant et T la durée de la charge; comme I est constant, nous écrivons plus simplement $I\int_0^T E\,dT$.

Pour la décharge, on aura de même $I'\int_0^{T'} E'\,dT$.

Le rendement en énergie sera donc

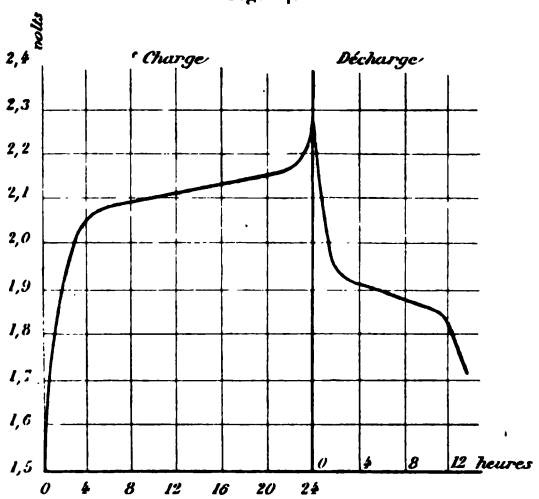
$$\rho = \frac{I'}{I}\,\frac{\int_0^{T'} E'\,dT}{\int_0^T E\,dT}.$$

Pour déterminer la valeur des intégrales, on mesure les

aires limitées entre la courbe, l'axe des temps et les ordonnées extrêmes, soit par la méthode de Simpson, soit par le planimètre d'Amsler.

Pour appliquer la méthode de Simpson, on divise l'intervalle 0-24 des abscisses en dix parties égales par des ordon-

Fig. 24.



nées parallèles à l'axe des volts; soient $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ les longueurs de ces ordonnées; la valeur moyenne de E sera égale à

$$\frac{1}{30}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots) + 2(y_2 + y_4 + \ldots) + y_{10}].$$

Le planimètre donne plus aisément le résultat cherché. C'est un petit intégrateur, à pointes et à roulettes; ces dernières roulent sur le papier en marquant leurs révolutions, tandis qu'une pointe reste fixe et qu'on fait suivre à l'autre le contour dont on veut évaluer l'aire ou l'ordonnée moyenne. On lit ces données sur le compteur de tours des roulettes.

Nous trouvons, pour la courbe relevée sur la *fig.* 24,

$$\rho = 0,39.$$

Le rendement en quantité est simplement

$$\rho' = \frac{I'T'}{IT} = \frac{5 \times 12}{3 \times 24} = 0,80.$$

4. *Comment aurait-on résolu le problème précédent si l'intensité du courant de charge et de décharge avait varié notablement?*

Il aurait fallu calculer le rapport

$$\frac{\int_0^{T'} E'I'\,dT}{\int_0^{T} EI\,dT};$$

pour cela, on aurait fait les produits EI et l'on en aurait construit les courbes, sur lesquelles il eût fallu opérer comme nous venons de le dire.

Notons que les intégrales sont exprimées en watts-heure.

5. *Un accumulateur Gadot a donné lieu aux observations suivantes, pendant sa décharge, opérée en seize heures, de* 2,1 *volts à* 1,75 *volt.*

Temps.	Intensités.	Temps.	Intensités.
h	ampères	h	ampères
0	12	9	10,73
1	11,30	10	10,69
2	11,10	11	10,65
3	10,99	12	10,60
4	10,92	13	10,50
5	10,87	14	10,30
6	10,83	15	9,90
7	10,80	16	9,45
8	10,77		

Cet appareil renfermait $12^{kg},5$ *de plaques. On demande quel est son débit spécifique et sa capacité spécifique en coulombs ou en ampères-heure.*

La formule de Simpson donne l'intensité moyenne

$$I = \frac{1}{48}[12 + 4(11,30 + 10,99 + 10,87 + 10,80 + 10,73 + 10,65 + 10,50 + 9,90) + 2(11,10 + 10,92 + 10,83 + 10,77 + 10,69 + 10,60 + 10,30) + 9,45]$$
$$= 10,64 \text{ ampères.}$$

Son débit spécifique égale donc $\frac{10,64}{12,50} = 0,85$ en ampères par kilogramme.

Sa capacité totale est de $10,64 \times 16 = 170,24$ en ampères-heure

$$= 612864 \text{ coulombs.}$$

Sa capacité spécifique est de

$$49029 \text{ coulombs} = 13 \text{ ampères-heure.}$$

Ce dernier chiffre est un peu exagéré, car nous avons poussé la décharge trop loin.

6. *On a besoin d'une différence de potentiel de* 36 *volts et d'un courant de* 12 *ampères, pendant six heures; combien prendra-t-on d'accumulateurs* E.P.S. *et comment les groupera-t-on, sachant qu'il ne faut point dépasser* 1 *ampère par kilogramme de plaque?*

Appelant r la résistance intérieure d'un élément, nous écrirons d'abord, pour n éléments en série,

$$E = n(1,9 - rI).$$

Or

$$r = \frac{0,008}{p},$$

d'où

$$E = n\left(1,9 - I\frac{0,008}{p}\right).$$

Mais, comme $p = I$, nous avons plus simplement

$$E = n(1,9 - 0,008),$$

ce qui donne

$$n = 20.$$

Le poids des plaques sera de 12^{kg}.

Pour ce qui est de la quantité d'électricité à fournir, nous aurons, en admettant une capacité utile de 6 ampères-heure par kilogramme,

$$6p = It,$$

d'où

$$t = 6.$$

C'est le temps demandé.

On montera donc 20 accumulateurs en série.

7. *Quel nombre d'accumulateurs de Montaud mettra-t-on en service pour actionner pendant une heure un moteur de* 75^{kgm} *nécessitant* 12,5 *ampères et ayant une résistance de* 6,5 *ohms?*

La question est triple, car il y a à se préoccuper du voltage, de la quantité et de la puissance.

Pour ce qui est du voltage, comme il faut au moteur 12,5 ampères sur 6,5 ohms, nous devrons avoir

$$E = IR = 81,25 = n \times 1,9,$$

d'où

$$n = 42,75.$$

Nous prendrons donc 43 accumulateurs en série.

Comme il n'y a qu'une faible quantité à fournir (12,5 ampères-heure), il faudra très peu de plomb : en effet, 1^{kg} donne

$$39600 \text{ coulombs} = 11 \text{ ampères-heure}.$$

Mais le courant exigé étant assez intense, nous avons à nous en préoccuper; or, de ce chef, nous devons réunir au moins 13^{kg} de plomb pour que la décharge s'opère bien : c'est un minimum que nous dépasserons pour d'autres considérations.

Reste en effet la question de l'énergie.

Il nous faut disposer d'au moins

$$\frac{81,25 \times 12,5 \times 3600}{9,81} = 365600^{kgm}.$$

Comme 1^{ks} de plaque de Montaud renferme 8477^{ks}, nous devrons employer

$$\frac{365600}{8477} = 43^{ks} \text{ de plomb.}$$

On se procurera donc 43 accumulateurs renfermant chacun 1^{ks} de plomb.

CHAPITRE VII.

ÉLECTROLYSE ET ÉLECTROMÉTALLURGIE.

1. *Un courant donne au voltamètre* 125^{cm^3} *d'hydrogène en deux minutes, à la température de* 28°, *sous la pression de* 755^{mm} : *la tension de vapeur de l'eau acidulée est de* 25^{mm} *à cette température; calculer l'intensité du courant.*

Le poids de ce volume d'hydrogène est

$$p = 0,125 \times 0,0896 \times \frac{730}{760} \times \frac{1}{1 + 0,003665 \times 28}$$
$$= 0,009755^{gr},$$

soit, par seconde, $0^{mgr},081291$.

Le courant a donc une intensité de 7,85 ampères.

2. *On met à la suite, dans un même circuit, deux voltamètres dont l'un porte de larges lames de platine et renferme de l'eau très acide; l'autre a des électrodes formées par des fils fins, vernis sur toute leur étendue, sauf sur leur section terminale, et il contient de l'eau très faiblement conductrice, ce voltamètre donnera-t-il moins de gaz que le premier?*

Non, car la surface des électrodes n'intervient que pour modifier l'intensité du courant, qui est la même dans tout le circuit.

3. *Un courant traverse à la fois un voltamètre à volume, renfermant de l'eau acidulée par l'acide phosphorique, et un voltamètre à poids, chargé d'une dissolution d'azotate d'argent; on obtient, au bout d'un temps déterminé,* 52^{cm^3} *d'hydro-*

gène à 0° *et* 760^{mm}; *quel est le poids d'argent déposé sur l'électrode négative du voltamètre à poids?*

Les 52$^{cm^3}$ d'hydrogène pèsent 0^{gr},00466; il se déposera donc 0,00466 × 108 = 0^{gr},503 d'argent.

En acidulant l'eau par l'acide phosphorique, on évite la formation d'eau oxygénée et l'électrolyse est plus régulière.

4. *Quelle intensité de courant faut-il pour déposer* 1^{kg} *en dix heures?*

1 ampère-heure dépose 1^{gr},189 de cuivre.

L'intensité du courant est, par suite,

$$\frac{100}{1,189} = 84,1 \text{ ampères.}$$

5. *On veut argenter en dix heures une sphère ayant* 10^{cm} *de rayon et l'on désire que la couche ait au moins* 0^{cm},02 *d'épaisseur; combien faudra-t-il employer d'éléments Daniell et comment les groupera-t-on, sachant que la résistance du bain est d'environ* 0,575 *ohm?*

Le poids d'argent à déposer est égal à

$$4 \times 314,16 \times 0,02 \times 10,5 = 263^{gr}.$$

Par heure, on aura 26^{gr},3, ce qui exige un courant de

$$\frac{26,3}{4,022} = 6,54 \text{ ampères.}$$

Prenons, pour chaque élément Daniell, sa résistance intérieure maximum, qui peut atteindre 2,8 ohms, et cherchons à égaler les résistances intérieure et extérieure; nous aurons

$$\frac{n \times 2,8}{m} = 0,575.$$

Mais nous avons, d'autre part, dans l'électrolyte,

$$IR = 6,54 \times 0,575 = 3,34 \text{ volts;}$$

c'est la force électromotrice nécessaire et strictement suffisante pour l'opération.

Pour être dans de bonnes conditions, il faut que la pile ait une force électromotrice double, soit égale à 6,68 volts, ce qui suppose à n une valeur au moins égale à 7.

Il vient

$$m = \frac{7 \times 2,8}{0,575} = 34.$$

Il faudrait donc faire 34 groupes de 7 éléments en série.

Ce résultat justifie bien l'emploi des machines dynamos pour la dorure et l'argenture industrielles.

6. *Le courant de 4 éléments Daniell, de résistance intérieure $r = 1,5$ ohm, montés en série, traverse un bain de galvanoplastie contenant du sulfate de cuivre de résistance spécifique $\alpha = 19,1$; les électrodes, qui sont de platine, ont 1500^{cm^2} de surface et elles sont écartées de 3^{cm}; calculer le poids du cuivre déposé en cinq minutes.*

Évaluons d'abord la résistance R du bain et sa force électromotrice de polarisation e;

$$R = \frac{19,1 \times 3}{1500} = 0,038 \text{ ohm}.$$

D'autre part,

$$e = J\varepsilon q. \tag{27}$$

Mais n'oublions pas que e sera exprimé en unités C.G.S. et non pas en volts; nous aurons donc

$$e = 4,17 \times 10^7 \times 0,00033 \times \frac{29,600}{31,8} \times 10 \times 10^{-8} \text{ volts}$$
$$= 1,28 \text{ volt}.$$

L'intensité du courant sera

$$I = \frac{4 \times 1,07 - 1,28}{0,038 + 4 \times 1,5} = 0,5 \text{ ampère}.$$

En cinq minutes, il passera

$$5 \times 60 \times 0,5 = 150 \text{ coulombs},$$

et le dépôt sera de

$$150 \times 0,00033 = 0^{gr},0495 \text{ de cuivre.}$$

7. *Quel est le nombre d'éléments Daniell nécessaires pour déposer le même poids de cuivre dans les conditions du problème ci-dessus, si l'on remplace les électrodes de platine par des lames de cuivre?*

Dans ce cas, il n'y a plus de polarisation, si le sulfate de cuivre est pur, et le travail du courant consiste en un simple transport de cuivre de l'anode à la cathode; la dépense d'énergie se réduit à l'échauffement de l'électrolyte, assimilé à un conducteur métallique.

Or 1 ampère-heure dépose $1^{gr},189$ de cuivre; en cinq minutes, le dépôt sera, par ampère, de

$$\frac{1,189}{12} = 0^{gr},099.$$

Pour déposer 0,0495, il faudra donc un courant de 0,5 ampère.

Il vient, par suite,

$$I = 0,5 = \frac{xE}{R + xr},$$

$$x = \frac{IR}{E - Ir} = \frac{0,5 \times 0,038}{1,07 - 0,5 \times 1,5} < 1.$$

Il suffit, par conséquent, d'un élément, alors que précédemment il en fallait quatre.

Il est vrai que le couplage des éléments eût pu être fait différemment; mais ce calcul montre néanmoins qu'il y a un grand avantage à employer des électrodes sans polarisation.

8. *On électrolyse par un courant faible un mélange d'azotates d'argent et de cuivre; quel métal se déposera le premier sur la cathode?*

C'est l'argent, parce que la réaction électrolytique qui se fait la première est celle qui absorbe le moins de chaleur, d'après la loi de Sprague.

La série électrolytique est la suivante : or, argent, cuivre, plomb, cadmium et zinc; le métal se déposera donc toujours le dernier, alors que l'or se déposera le premier.

9. *On place dans un même circuit des voltamètres à poids renfermant de l'azotate d'argent, du sulfate de cuivre, du métaphosphate, du pyrophosphate et du phosphate de fer ordinaire en dissolution et du fluorure d'aluminium en fusion; quels seront les poids de métal déposés sur les cathodes de ces divers électrolytes pour un courant ayant une intensité égale à* 1 *ampère, pendant une heure?*

Il y a lieu d'appliquer ici la loi de Becquerel : la décomposition électrolytique est régie par l'élément électronégatif. Or les formules des électrolytes proposés sont les suivantes :

$$AgO, AzO^5; \quad CuO, SO^3; \quad FeO, PhO^5; \quad 2FeO, PhO^5;$$
$$3FeO, PhO^5; \quad AlFl^3.$$

Nous les écrirons de la manière suivante, en mettant en ligne les quantités qui sont réellement équivalentes entre elles :

$$AgO, AzO^5; \quad CuO, SO^3; \quad FeO, PhO^5; \quad \tfrac{1}{2}(2FeO, PhO^5);$$
$$\tfrac{1}{3}(3FeO, PhO^5); \quad Al^{\frac{1}{3}}Fl.$$

Il se déposera, par conséquent,

$$Ag; \quad Cu; \quad Fe; \quad Fe; \quad Fe; \quad Fe; \quad \tfrac{1}{3}Al.$$

Passant aux nombres, nous aurons

$$Ag = 4^{gr},022; \quad Cu = 1^{gr},189; \quad Fe = 1^{gr},046; \quad Al = 0^{gr},171.$$

10. *Quelle est la force électromotrice nécessaire pour décomposer le sulfate de zinc?*

Un coulomb, fourni par une source dont la force électromotrice est E, produit un travail $\mathfrak{T} = \frac{E}{9,81}$ kilogrammètres. Employé à décomposer un électrolyte, dont le gramme se forme avec un dégagement de q^{cal}, ce coulomb libère une quantité connue ε du métal engagé dans la combinaison. On

calcule aisément ε en multipliant l'équivalent électrochimique de l'hydrogène par l'équivalent du métal z,

$$\varepsilon = 0,000010384 \times z.$$

La chaleur mise en œuvre sera

$$0,000010384 \times z \times q,$$

et le travail correspondant en kilogrammètres sera

$$\mathfrak{T} = 425 \times 0,000010384 \times z \times q.$$

Égalant ces deux expressions, nous aurons

$$\begin{aligned} E &= 425 \times 0,000010384 \times z \times q \times 9,81 \\ &= 0,0433 \times z \times q \text{ volts.} \end{aligned}$$

Si q est rapporté aux calories-grammes, il vient

$$E = 0,0000433 \times z \times q \text{ volts.}$$

Dans le cas proposé,

$$z = 32,5,$$

$$q = \frac{53650}{32,5} = 1650 \text{ calories-grammes;}$$

par suite,

$$E = 2,32 \text{ volts.}$$

Nous voyons, en somme, qu'il faut simplement multiplier 0,0000433 par le nombre de calories-grammes dégagées par l'équivalent d'électrolyte dans sa formation.

11. *Calculer la force électromotrice de polarisation de l'eau, du sulfate de cuivre et de l'azotate d'argent.*

En tenant compte de ce qui précède, nous aurons
Pour l'eau :

$$E = 0,0000433 \times 34500 = 1,494 \text{ volt.}$$

Pour CuO, SO^3 :

$$E = 0,0000433 \times 29600 = 1,282 \text{ volt.}$$

Pour AgO, AzO^5 :

$$E = 0,0000433 \times 8700 = 0,38.$$

12. *Dans le procédé Létrange, on grille la blende, de manière à la transformer en sulfate de zinc, et on la traite par l'eau; cette dissolution est soumise à l'action d'un courant. Quel travail faudra-t-il dépenser pour recueillir* 10^{kg} *de zinc à l'heure?*

La force électromotrice de polarisation égale 2,32 volts.

1 ampère-heure libère $0^{gr},1213$ de zinc : par suite, il faudra, pour libérer 10^{kg} de zinc à l'heure, $\frac{10000}{0,1213}$ ampères; nous aurons par suite

$$\mathfrak{T} = \frac{2,32 \times 10000}{9,81 \times 0,1213} = 19505^{kgm}.$$

1 coulomb libère $0^{gr},000337$ de zinc.

Le travail nécessaire pour déposer 10^{kg} de métal sera donc

$$\mathfrak{T} = \frac{2,32 \times 10000}{9,81 \times 0,000337} = 7030303^{kgm}.$$

Il faudra un moteur de

$$\frac{7030303}{270000} = 26 \text{ chevaux.}$$

Cela fait 2,6 chevaux par kilogramme de zinc.

Il en faut le double dans la pratique industrielle.

13. *MM. Blas et Miest électrolysent le sulfate de zinc en employant une anode de blende : l'acide libéré attaque cette blende et la dissout. Quel travail donnera* 10^{kg} *de métal à l'heure?*

L'attaque de la blende par l'acide sulfurique donne du sulfate de zinc avec dépôt de soufre; il se reforme donc autant de sulfate qu'il s'en est dissocié sous l'action du courant et le seul travail à dépenser en somme est celui de la décomposition de la blende.

La chaleur de formation du sulfure de zinc est de 20940^{cal}, soit de $\frac{20940}{32,5} = 644^{cal}$ par kilogramme de zinc.

Le travail équivalent est de

$$644 \times 425 = 273700^{kgm}.$$

Le moteur à employer devra développer théoriquement

$$\frac{273000}{270000} = 1,01 \text{ cheval.}$$

Ce procédé est par suite supérieur, comme rendement, au procédé Létrange.

14. *A Stoke-on-Trent, en Angleterre, une machine de* 500 *chevaux fournit, par le procédé Cowles, plus de* 10^{kg} *d'aluminium par heure; quel est le rendement de ce procédé, sachant que la dynamo donne* 5250 *ampères et* 55 *volts?*

1 ampère-heure libère $0^{gr},513$ d'aluminium; 5250 ampères devraient fournir $2^{kg},70$ au lieu de 10^{kg}.

Ce calcul montre que dans l'opération Cowles le rôle très réducteur du charbon formant la brasque du four intervient pour une large part dans le phénomène. Il se pourrait même qu'il n'y ait pas réellement électrolyse, mais plutôt dissociation à la faveur de la haute température développée par le courant.

CHAPITRE VIII.

PILES THERMOÉLECTRIQUES.

1. *Quel est le pouvoir thermoélectrique d'un couple fer-maillechort, dont les soudures sont à* 100° *et zéro?*

Les Tables nous donnent

Fer.....	$-17,34$	$+0,048t$
Maillechort.....	$+12,07$	$+0,051t$

La différence de potentiel est égale à

$$-29,41 \qquad -0,003t.$$

Il vient donc, à 100° et zéro,

$$\begin{aligned} E &= 100(29,41 + 0,003 \times 50) \\ &= 29,56 \text{ microvolts} \\ &= 0,02956 \text{ millivolts.} \end{aligned}$$

Le courant va du maillechort au fer à travers la soudure chaude.

2. *A quelle température correspond le point neutre d'un couple fer-cuivre?*

Calculons d'abord la force électromotrice de ce couple.

Fe.....	$-17,34$	$+0,048t$
Cu.....	$-1,36$	$-0,0095t$
Différence de potentiel...	$+15,98$	$-0,058t$

Le courant va du fer au cuivre à travers la soudure chaude.
Le point neutre est celui pour lequel la différence de po-

tentiel s'intervertit en passant par zéro; la température t de ce point sera donc donnée par l'équation

$$15,98 - 0,058t = 0.$$

On en déduit

$$t = 274^\circ.$$

Mais il ne faut pas oublier que t est une température moyenne; il est donc nécessaire qu'une des soudures soit portée à 548°, alors que l'autre sera maintenue à zéro. Passé cette température, le courant ira du cuivre au fer à travers la soudure chaude.

3. *Une soudure bismuth-cuivre, que traverse un courant de* 200 *milli-ampères, est entourée d'eau à zéro; au bout de vingt minutes, on constate qu'il s'est formé un glaçon de* $0^{gr},15$ *autour de la soudure. On demande de calculer la chute de potentiel* E *en volts au contact bismuth-cuivre, à zéro, dans les conditions de notre expérience.*

En vertu de l'effet Peltier, il se produit à la soudure une absorption de calorique équivalente à la dépense d'énergie nécessaire pour élever une quantité d'électricité It au niveau E; nous avons donc, en appelant q la chaleur absorbée,

$$Jq = EIt,$$

d'où

$$E = \frac{Jq}{It}.$$

Or

$$q = 0,15 \times 80 \text{ calories-grammes},$$
$$t = 1200 \text{ secondes},$$

$$E = \frac{4,17 \times 10^7 \times 0,15 \times 80}{0,22 \times 10^{-1} \times 1200} = 19000000 \text{ U.E.M.}$$
$$= 0,19 \text{ volt.}$$

4. *Une pile Clamond-Carpentier* (Fe et alliage Sb + Zn) *est composée de* 12 *couronnes de* 10 *éléments, montées en série; elle donne* 8 *volts, pour une consommation de* 175^{lit} *à l'heure;*

sa résistance intérieure est de 3 *ohms. Calculer son rendement maximum.*

La pile rendra le maximum de travail sur une résistance extérieure de 3 ohms, égale à sa résistance intérieure; son travail maximum sera égal à (Problème 10, Chap. V)

$$\frac{E^2}{4r} = \frac{\overline{8}^2}{12} = 5,53 \text{ watts.}$$

Or ce travail coûte 175^{lit} à l'heure; le kilowatt exigera donc une dépense de

$$175 \times \frac{1000}{5,33} = 32830^{lit}.$$

Pour évaluer le rendement d'une semblable pile, il faut le comparer à celui d'un moteur à gaz, consommant le même gaz. Nous avons démontré [1] qu'un bon moteur donne le cheval-heure par 650^{lit}, soit le kilowatt-heure par

$$650 \times 1,36 = 884^{lit}.$$

Le rendement de la pile serait donc égal à

$$\frac{884}{32830} = 2,7 \text{ pour } 100.$$

Ce résultat explique le peu de succès obtenu par les électriciens dans l'emploi industriel de la pile thermoélectrique pour l'éclairage; cet appareil semble condamné à ne point sortir des laboratoires. Ajoutons que la pile Clamond-Carpentier est la meilleure qui ait été construite.

---

[1] WITZ, *Traité théorique et pratique des moteurs à gaz*, 3e édition; 1892.

CHAPITRE IX.

RHÉOMÈTRES.

1. *Une boussole des tangentes porte* 15 *tours de fil, dont la longueur développée est de* 1899^{cm}; *en un lieu, où l'intensité horizontale du magnétisme terrestre* $H = 0,188$, *on relève une déviation de* 45°; *quelle est, en ampères, l'intensité du courant donnant cette déviation? L'aiguille a une longueur moindre que le* $\frac{1}{30}$ *du rayon moyen r des spires de fil.*

Dans ce cas, qui est celui des boussoles des tangentes bien conditionnées, on a

$$I = \frac{rH}{2n\pi} \operatorname{tang} \alpha.$$

On calculera d'abord r.

$$r = \frac{1899}{15 \times 2 \times 3,1416} = 20^{cm},15.$$

Il vient donc

$$I = \frac{20,15 \times 0,188}{2 \times 15 \times 3,1416} = 0,0419 \text{ U.E.M.}$$
$$= 0,419 \text{ ampère.}$$

2. *Un galvanomètre Deprez-d'Arsonval est formé d'un cadre de* 50 *spires, présentant chacune une surface de* 100^{cm^2}; *ce cadre est mobile dans un champ uniforme dont l'intensité* $H = 20$; *il pèse* $130^{gr},5$ *et il est suspendu par deux fils parallèles, longs de* 10^{cm} *et distants de* $0^{cm},3$. *Quelle est l'intensité d'un courant produisant une déviation de* 15°?

Occupons-nous d'abord de calculer le moment du couple

horizontal C de la suspension bifilaire : il faut faire intervenir le poids de l'équipage mobile et la tension des fils; en même temps que l'équipage tourne autour de son centre de gravité, celui-ci s'élève et glisse le long de la verticale. Il faut donc écrire les conditions d'équilibre d'un corps libre de tourner autour d'un axe et de glisser le long de cet axe; pour cela, on égale successivement à zéro les projections des forces sur la verticale et la somme de leurs moments par rapport à l'axe vertical passant par le centre de gravité : on en déduit, par un calcul connu, d étant la distance des fils et l leur longueur,

$$C = \frac{P\,d^2}{4\,l} = \frac{130,5 \times \overline{0,3}^2}{4 \times 10} = 0,293 \text{ C.G.S.}$$

pour une déviation de 90°.

Les 50 spires du cadre sont équivalentes à une spire unique de $5 \times 100 = 500^{cm^2}$; ce raisonnement cesserait d'être rigoureux, si l'on n'avait pas tenu compte, dans l'évaluation de l'intensité du champ, du tube en fer doux placé à l'intérieur du cadre mobile.

Nous avons dès lors

$$\begin{cases} IHS \cos\varphi = C \sin\varphi, \\ I = \dfrac{C}{HS} \operatorname{tang}\varphi = 0,008 \text{ milliampères.} \end{cases}$$

Cet instrument joint donc, à son apériodicité, l'avantage d'une extrême sensibilité.

3. *Une boussole des tangentes est mise dans un circuit avec un voltamètre à poids, renfermant de l'azotate d'argent; la déviation moyenne de l'aiguille, pendant une heure d'observation, a été de* 32°35'; *il s'est déposé* $5^{gr},395$ *d'argent. Quel est le coefficient de réduction de cette boussole, au lieu de l'expérience? Dire de plus quelle est l'intensité du champ uniforme créé par l'unité de courant, sachant que* $H = 0,190$.

L'intensité moyenne du courant se déduit de la quantité d'argent déposée :

$$I = \frac{5,395}{4,022} = 1,34 \text{ ampères.}$$

Le coefficient de réduction s'en déduit :

$$I = 1,34 = \frac{H}{G} \operatorname{tang} \alpha.$$

$$\frac{H}{G} = \frac{1,34}{\operatorname{tang} 32^\circ 35'} = 2,097.$$

Or c'est G qui exprime l'intensité du champ créé par l'unité de courant. Mais H est évalué en unités C.G.S., et il convient d'évaluer de même l'intensité I en unités C.G.S.

$$I = 0,134 \text{ U.E.M.},$$

$$G = \frac{H}{0,2097} = 0,91.$$

On peut vérifier que

$$G = \frac{2\pi n}{r}.$$

4. *Une boussole des sinus donne, pour un courant de* 1,25 *ampère, une déviation de* 35°, *quand l'aiguille est dans le plan du cadre, et une déviation de* 18°, *lorsque l'aiguille est à* 20° *du cadre. Calculer la formule de mérite de l'instrument dans les deux cas.*

Il faut déterminer l'intensité du courant donnant une déviation de 1° dans les deux cas : soit x cette intensité.

Premier cas :

$$\frac{x}{1,25} = \frac{\operatorname{tang} 1^\circ}{\operatorname{tang} 35^\circ},$$

$$x = 0,031 \text{ ampère} = 31 \text{ milliampères.}$$

Deuxième cas :

$$\frac{x}{1,25} = \frac{\operatorname{tang} 1^\circ}{\operatorname{tang} 18^\circ},$$

$$x = 67 \text{ milliampères.}$$

La formule de mérite s'exprime donc en milliampères; on n'en fait plus guère usage.

5. *Un galvanomètre astatique de Thomson, shunté au mil-*

lième, est mis dans le circuit d'un étalon Post-Office avec une résistance de 15000 *ohms, et l'on observe une déviation de* 60 *divisions de l'échelle : quelle est la sensibilité définie par le nombre de mérite de l'instrument?*

L'intensité du courant dans le galvanomètre est égale à

$$I = \frac{E}{1000R + g} = \frac{E}{1000R} = \frac{1,074}{15 \times 10^6} \text{ ampère.}$$

En admettant que la déviation soit proportionnelle à cette intensité, ce qui n'est pas éloigné de la vérité, on aura pour le nombre n de divisions qui correspondent à l'unité de courant

$$n = \frac{60}{I} = \frac{9 \times 10^8}{1,074}.$$

Quelle est dès lors la résistance x du circuit qui, avec le même étalon Post-Office, produirait l'unité de déviation?

$$\frac{1}{n} = \frac{E}{x},$$

$$x = nE = \frac{9 \times 10^8}{1,074} \times 1,074 = 9 \times 10^8 \text{ ohms} = 900 \text{ mégohms.}$$

C'est le nombre de mérite du galvanomètre; il est d'autant plus grand que le galvanomètre est plus sensible.

Le nombre de mérite est plus souvent employé que la formule de mérite donnée ci-dessus.

6. *On se propose d'étalonner un galvanomètre dont le cadre est recouvert de* 30000 *tours de fil et dont la sensibilité est telle qu'un courant extrêmement faible, donnant au voltamètre à poids un dépôt d'argent inappréciable, fait dévier l'aiguille de l'instrument de près de* 90°. *Comment s'y prendra-t-on?*

Voici le procédé que l'auteur de ce livre emploie dans ce cas.

Il introduit dans le même circuit un étalon Post-Office, une

boîte de résistances de 20000 ohms et le galvanomètre; supposons qu'on observe, avec 18600 ohms, une déviation de 35°, on aura

$$I = \frac{1,074}{18600} = k.\delta.$$

On a, par suite,

$$I = 0,000057 \text{ ampère} = 0,057 \text{ milliampère},$$

$$k = 0,00163.$$

Donc, en admettant une déviation proportionnelle, on aura une déviation δ de 1° pour un courant de 0,00163 milliampère. Telle est la formule de mérite de l'instrument.

Pour évaluer le nombre de mérite, il faut déterminer la résistance extérieure du circuit, donnant, avec le même étalon, l'unité de déviation : ce nombre ressort immédiatement de l'expérience que nous venons de faire. Il est égal à

$$18600 \times 35 = 651000 \text{ ohms};$$

on peut dépasser de beaucoup cette sensibilité.

7. *On intercale dans un circuit quelques éléments Daniell, une boussole des tangentes, que l'on veut étalonner, et une résistance de 20 ohms, dont les extrémités présentent une différence de potentiel égale à 2,10 volts; la déviation est de 35°; quel coefficient k permettra de passer de la déviation aux ampères?*

$$I = k \tang \alpha = \frac{2,10}{20} = 0,105 \text{ ampère},$$

$$k = \frac{0,105}{\tang 35^\circ} = 0,15.$$

8. *Un galvanomètre différentiel est mal réglé et les constantes k et k' de ses deux bobines sont inégales; déterminer la valeur du rapport $\frac{k}{k'}$ par l'observation de ce fait que les résistances des deux bobines sont $g = 4,8$ et $g' = 5,2$ ohms, et qu'un courant bifurqué donne une déviation δ égale à zéro*

pour un ajustement de résistances ρ *et* ρ' *égales à* 21 *et* 22 *ohms.*

$$\frac{I}{\frac{1}{g+\rho}} = \frac{I'}{\frac{1}{g'+\rho'}},$$

$$\delta = kI - k'I' = 0,$$

$$\frac{k}{k'} = \frac{I'}{I} = \frac{g+\rho}{g'+\rho'} = \frac{4,8+21}{5,2+22} = 0,948.$$

Le plus souvent une des bobines des galvanomètres différentiels est ajustable, de manière qu'on puisse faire $k = k'$. Quelquefois aussi k est égal à un multiple entier de k'.

9. *Une pile alimente à la fois les deux circuits antagonistes d'un galvanomètre différentiel parfaitement réglé; un des courants est continu et il traverse une résistance* R; *l'autre est interrompu par un diapason, qui charge n fois par seconde un condensateur de capacité* C *et le décharge autant de fois à travers le galvanomètre. Quelle est la relation qui devra exister entre* R *et* C *pour que le galvanomètre soit réduit à zéro?*

Le courant continu débite par seconde une quantité d'électricité égale à $\frac{E}{R}$; le courant, périodiquement interrompu, donne nCE; nous avons donc

$$\frac{E}{R} = nCE,$$

d'où

$$\frac{1}{RC} = n.$$

La capacité du condensateur pourrait être déterminée ainsi en fonction d'une résistance connue et du nombre n des interruptions, qu'on peut évaluer avec une très grande précision. Pour les applications, on exprimera R en mégohms et C en microfarads ou, plus simplement, en U.E.M.

10. *Une boussole des tangentes étalonnée donne l'intensité*

des courants par la formule $I = k \operatorname{tang}\varphi$; *on a commis une erreur* δ *dans la lecture de l'angle* φ; *quelle est l'erreur* x *commise sur* I?

$$I + x = k \operatorname{tang}(\varphi + \delta) = k\left(\operatorname{tang}\varphi + \frac{\delta}{\cos^2\varphi}\right),$$

$$x = \frac{k\delta}{\cos^2\varphi} = \frac{I\delta}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{2I\delta}{\sin 2\varphi}.$$

Le minimum de x correspond à $\varphi = 45°$.

11. *On mesure par la boussole des tangentes les intensités de deux courants, dont l'un est sensiblement le double de l'autre; quelles sont les déviations qu'on cherchera à obtenir pour atteindre le maximum de sensibilité des deux observations?*

Soient θ et θ' les deux déviations et n le rapport des intensités

$$\operatorname{tang}\theta = n \operatorname{tang}\theta'.$$

Il s'agit de trouver la valeur de θ pour laquelle $\theta - \theta'$ devient maximum; or nous avons

$$\operatorname{tang}(\theta - \theta') = \frac{\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\theta'}{1 + \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\theta'}$$
$$= \frac{n \operatorname{tang}\theta' - \operatorname{tang}\theta'}{1 + n \operatorname{tang}^2\theta'} = \frac{n - 1}{\dfrac{1}{\operatorname{tang}\theta'} + n \operatorname{tang}\theta'}.$$

Le numérateur étant constant, cherchons la valeur qui rend minimum le dénominateur.

Or on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\theta'} + n \operatorname{tang}\theta' = \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tang}\theta'}} - \sqrt{n \operatorname{tang}\theta'}\right)^2 + 2\sqrt{n}.$$

Cette expression est minimum pour

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tang}\theta'}} = \sqrt{n \operatorname{tang}\theta'};$$

d'où, en faisant n égal à 2,

$$\operatorname{tang}\theta' = \sqrt{\frac{1}{2}} = \operatorname{tang} 35^\circ 15'$$

et

$$\operatorname{tang}\theta = \sqrt{2} = \operatorname{tang} 54^\circ 44'.$$

Ce sont des valeurs équidistantes de 45°, angle de sensibilité maximum des boussoles des tangentes.

12. *Un galvanomètre à réflexion, placé à une distance* $l = 300^{mm}$ *de l'échelle divisée, a donné pour deux courants des déplacements du point lumineux de* $n = 60^{div}$ *et* $n' = 120^{div}$; *on demande le rapport* x *des intensités des deux courants.*

$$\frac{I}{I'} = \frac{\operatorname{tang}\frac{a}{2}}{\operatorname{tang}\frac{a'}{2}} = x.$$

Exprimons $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$ en fonction de $\operatorname{tang} a$:

$$\operatorname{tang} a = \frac{2\operatorname{tang}\frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tang}^2\frac{a}{2}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 a} - 1}{\operatorname{tang} a} = \frac{\sqrt{1 + \frac{n^2}{l^2}} - 1}{\frac{n}{l}}.$$

Le rapport est donc égal à

$$\frac{\sqrt{l^2 + n^2} - l}{\sqrt{l^2 + n'^2} - l}\,\frac{n'}{n} = \frac{\sqrt{90000 + 3600} - 300}{\sqrt{90000 + 144000} - 300}\,\frac{2}{1} = \frac{12,4}{22,8}.$$

Les deux courants sont donc loin d'être doubles l'un de l'autre ; ils le seraient si l était fort grand par rapport à n et n'.

13. *Deux cadres circulaires, recouverts de fil, sont disposés à angle droit; leur résistance est identique et égale pour chacun d'eux à* 1 *ohm : une aiguille aimantée est suspendue au centre. On ajoute une résistance* x *à l'un des circuits et*

l'on constate que l'aiguille n'est pas déviée et qu'elle reste dans le méridien, lorsque ce cadre fait avec le méridien un angle a égal à 69°. *Déduire de cette observation la valeur de* x.

On a évidemment

$$I \cos a = I' \sin a,$$

d'où

$$\operatorname{tang} a = \frac{I}{I'} = \frac{\frac{E}{1}}{\frac{E}{1+x}} = 1 + x.$$

On trouve donc

$$1 + x = \operatorname{tang} 60^\circ = 1,73,$$
$$x = 0^{\text{ohm}},73.$$

Ce dispositif ingénieux a été proposé par M. Carpentier pour la mesure des résistances, mais la première idée de l'appareil appartient à M. Jenkin.

14. *On veut réduire, par un shunt, l'intensité d'un courant aux* $\frac{3}{7}$ *dans un galvanomètre ayant* 5 *ohms de résistance entre les bornes; déterminer la résistance* S *du shunt et en déduire celle de l'ensemble* x *des deux circuits dérivés.*

Soit n le pouvoir multiplicateur du shunt, c'est-à-dire le nombre par lequel il faut multiplier l'intensité observée pour calculer celle du courant principal.

$$n = \frac{G + S}{S},$$

$$(23) \qquad S = \frac{G}{n-1} = \frac{G}{\frac{7}{3} - 1} = \frac{3}{4} G = 3,75 \text{ ohms},$$

$$(22) \qquad x = \frac{1}{\frac{1}{G} + \frac{1}{S}} = \frac{GS}{G+S} = \frac{G}{n} = 2,14 \text{ ohms}.$$

En pratique, au lieu de mesurer S, on trouve plus facile et

plus sûr de faire varier la longueur du fil de shunt jusqu'à ce que la résistance totale soit devenue $\frac{G}{n}$.

15. *Un galvanomètre de* 10 *ohms de résistance, ayant été shunté par un fil de résistance* S *égale à* 3,33 *ohms, on se propose de calculer la valeur de la résistance compensatrice* σ *à introduire dans le circuit principal, pour que le courant* y *garde la même valeur.*

Nous devons avoir

$$(24)\qquad \begin{cases} G = \frac{G}{n} + \sigma, \\ \sigma = G\left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Or

$$n = \frac{G + S}{S}.$$

Donc

$$\sigma = \frac{G^2}{G + S} = \frac{100}{13,33} = 7,50 \text{ ohms}.$$

16. *Un galvanomètre, de résistance* x *inconnue, est mis en circuit avec une résistance* R *de* 200 *ohms; un shunt de* 20 *ohms dérivant une partie du courant, on relève une déviation* δ; *sans shunt, il faut porter la résistance à une valeur* R_1 *égale à* 2500 *ohms pour ramener la déviation à la même valeur* δ.

Quelle est la résistance x?

Dans le premier cas,

$$(21)\qquad I = \frac{ES}{Sx + Rx + RS}.$$

Dans le second cas,

$$I = \frac{E}{R_1 + x}.$$

On en déduit

$$x = \frac{R_1 - R}{R} S = 230 \text{ ohms}.$$

17. *On met un galvanomètre dans le circuit d'une pile de*

10 *éléments Daniell, avec une boîte de résistances; pour deux résistances* R *et* R′ *de la boîte égales à* 62 *et* 110 *ohms, on relève des déviations de* 38° *et* 25°. *Faire, sur ces données, le tarage du galvanomètre.*

Nous avons

$$I = k\delta = \frac{nE}{nr + R},$$

$$I' = k\delta' = \frac{nE}{nr + R'};$$

d'où

$$\frac{1}{k\delta'} - \frac{1}{k\delta} = \frac{R' - R}{nE}$$

et

$$k = \frac{nE}{R' - R}\left(\frac{1}{\delta'} - \frac{1}{\delta}\right) = \frac{10,7}{48}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{38}\right) = 0,003.$$

18. *Un galvanomètre à mercure de Lippmann a une chambre parallélépipédique de* $0^{cm},2$ *d'épaisseur; un courant produit dans les branches du tube en* U *une dénivellation de* $5^{cm},2$; *calculer l'intensité de ce courant, sachant que l'intensité du champ de l'aimant* H = 300 C.G.S.

Dans une branche verticale, le champ H exerce sur un courant I, de longueur l, une action de

$$HIl \text{ dynes.}$$

La force antagoniste produite par la dénivellation x de mercure est

$$exh\,dg \text{ dynes,}$$

si nous appelons e l'épaisseur de la chambre et d la densité du mercure.

Égalant ces deux quantités, nous trouvons

$$I = \frac{dge}{H}x = \frac{13,596 \times 9,81 \times 0,2}{300} \times 5,2$$

$$= 0,46 \text{ U.E.M.}$$

$$= 4,6 \text{ ampères.}$$

On peut donner à cet instrument une sensibilité beaucoup plus grande encore, en augmentant H et diminuant e.

19. *Une décharge instantanée, lancée dans le fil d'un galvanomètre balistique, y détermine une impulsion δ égale à* 35°; *or on sait qu'un courant continu de* 0,3 *ampère produit une déviation α de* 39°, *et l'on a constaté que la durée d'une oscillation de l'aiguille, au lieu de l'expérience, est de* 0,98 *seconde. Quelle est la quantité d'électricité qui a traversé ce balistique?*

On démontre en Mécanique que le produit du moment d'inertie K d'une aiguille mobile par son accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ est égal au moment du couple résultant par rapport à l'axe de rotation : si nous appelons $\mathfrak{M}$ le moment magnétique de l'aiguille, G la constante du galvanomètre employé, H′ le champ produit par le cadre quand il est traversé par un courant d'intensité I, nous aurons

$$H' = GI = G\frac{dq}{dt};$$

$$K\frac{d\omega}{dt} = \mathfrak{M}H' = \mathfrak{M}G\frac{dq}{dt};$$

$$K\omega_0 = \mathfrak{M}Gq.$$

ω_0 est la vitesse initiale de l'aiguille; c'est la vitesse avec laquelle elle est chassée en avant. Elle ne s'arrêtera qu'après avoir épuisé sa force vive en luttant contre l'action terrestre, dans le champ d'intensité H.

Le travail dépensé est

$$\frac{1}{2}K\omega_0^2 = \mathfrak{M}(1-\cos\delta)H = 2\mathfrak{M}H\sin^2\frac{\delta}{2};$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}^2G^2q^2}{K} = 2\mathfrak{M}H\sin^2\frac{\delta}{2}$$

et

$$q = \frac{2}{G}\sqrt{\frac{KH}{\mathfrak{M}}\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{KH}{\mathfrak{M}}}\sin\delta.$$

Mais nous savons, d'autre part, que

$$I = \frac{H}{G} \operatorname{tang} \alpha;$$

de plus, si t est la durée de l'oscillation de l'aiguille dans le champ terrestre, d'intensité H,

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{\mathfrak{M} H}}.$$

Réductions faites, il vient

$$q = \frac{I}{\operatorname{tang} \alpha} \frac{t}{\pi} \sin \delta = 0{,}084 \text{ coulomb.}$$

20. *Un électrodynamomètre étant traversé par un courant continu de* 1,26 *ampère, il faut donner une torsion de* 105° *pour ramener au zéro l'aiguille du cadre mobile; déduire de cette expérience l'étalonnage de l'instrument et dire quelle est l'intensité d'un courant exigeant une torsion de* 45°.

La bobine mobile étant placée dans le méridien magnétique et l'action terrestre étant d'ailleurs négligeable devant celle du courant, il n'y a à considérer, comme forces antagonistes, que l'action du courant, qui tend à rendre les bobines parallèles, et la réaction ou torsion du fil. Le courant est le même dans les deux bobines; nous aurons, par suite,

$$I^2 GS = C\theta;$$

G est la valeur moyenne de la constante galvanométrique du cadre fixe dans la région occupée par la bobine mobile, S est la surface totale des spires de la bobine mobile et C le couple du fil.

Il vient

$$I^2 = \frac{C}{GS} \theta = k\theta.$$

C'est k qu'il s'agit de déterminer d'abord

$$k = 0{,}015.$$

Dès lors

$$I = \sqrt{k\theta} = 0{,}68 \text{ ampère.}$$

21. *Un courant continu donne dans un électrodynamomètre une déviation δ; quelle est l'intensité du courant?*

Ce cas diffère du précédent en ce que l'on observe la déviation de la bobine mobile au lieu de noter la torsion à donner pour ramener l'aiguille au zéro; le champ terrestre devrait intervenir, mais on peut négliger son influence, et l'on a, dans le cas d'une suspension unifilaire,

$$I^2 GS \cos\delta = C\delta,$$

$$I^2 = k\frac{\delta}{\cos\delta}.$$

22. *Une génératrice à courants alternatifs sinusoïdaux donne, à l'électrodynamomètre, une déviation correspondante à 2,5 ampères; quelle est l'intensité moyenne de ce courant et quelle est son intensité efficace?*

L'intensité I_t du courant sinusoïdal à l'instant t est donnée par la formule

$$I_t = I_0 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

dans laquelle I_0 est l'intensité maximum du courant et T la durée de la période; nous supposerons que la self-induction est négligeable.

L'intensité moyenne d'un tel courant est, à vrai dire, nulle; mais on désigne par ce nom la valeur de $\int I_t\,dt$ prise pour une demi-période et divisée par cette demi-période. La moyenne des valeurs de $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ entre les limites $t = 0$ et $t = \frac{T}{2}$ étant égale à $\frac{2}{\pi}$, nous aurons

$$I_m = \frac{2}{\pi} I_0 = 0,637 I_0.$$

Or l'électrodynamomètre ne donne pas cette intensité moyenne, mais bien la racine carrée de la moyenne des

carrés de l'intensité : le Congrès international de 1889 a donné à cette valeur le nom d'*intensité efficace :*

$$I_{eff.} = \sqrt{I_m^2}.$$

C'est en effet de cette intensité que dépendent les actions lumineuses des courants utilisés dans une lampe électrique.

Calculons cette valeur de $I_{eff.}$

Le couple exercé entre les deux bobines de l'électrodynamomètre est égal à

$$I_0^2 \sin^2 2\pi \frac{t}{T}.$$

La déviation observée est proportionnelle à

$$\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_t^2\, dt = \frac{I_0^2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 2\pi \frac{t}{T}\, dt.$$

Or

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x;$$

donc l'intégration indiquée ci-dessus nous conduira à la valeur $\frac{I_0^2}{2}$.

Il vient par suite

$$I_{eff.} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Quel est le rapport de l'intensité moyenne à l'intensité efficace?

$$\frac{I_m}{I_{eff.}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0,9.$$

Donc

$$I_m = 0,9\, I_{eff.}$$

Or les indications de l'électrodynamomètre donnent l'intensité efficace; il faut par conséquent les réduire de $\frac{1}{10}$ pour obtenir le courant moyen.

Dans le cas proposé,

$$I_m = 2,25,$$
$$I_{eff.} = 2,50.$$

23. *Un galvanomètre optique de Becquerel est rempli de sulfure de carbone; le tube est entouré de* N *spires de fil et la rotation du plan de polarisation est égale à* θ : *calculer l'intensité de ce courant.*

On a

$$\theta = 4\pi NI \times 0',04341.$$

Cette valeur 0',04341 est la constante de Verdet pour le sulfure de carbone; cela veut dire qu'une radiation D d'un brûleur sodé subit une rotation de 0',04341 en traversant 100^{cm} de sulfure de carbone à la température zéro dans un champ égal à l'unité.

On en déduit

$$I = \frac{\theta}{0',04341} \frac{1}{4\pi N}.$$

Cette formule permet de calculer la constante k de cet instrument

$$k = \frac{1}{4\pi N \times 0,04341}.$$

CHAPITRE X.

RÉSISTANCES.

1. *Un fil d'aluminium a* $0^{cm},5$ *de diamètre et* $1^{m},36$ *de longueur; calculer sa résistance.*

Nous avons

$$R = \alpha \frac{l}{s} = 2,889 \times 10^3 \times \frac{136}{\pi\left(\frac{0,5}{2}\right)^2} = 2000580 \text{ U.E.M.}$$

$$= 0,002 \text{ ohm,}$$

$$= 2000,6 \text{ microhms.}$$

2. *Un fil télégraphique en fer de* $0^{cm},4$ *de diamètre est remplacé par du bronze silicieux Lazare Weiler de même longueur, ayant* $0^{cm},15$ *de diamètre; quel est le rapport des résistances des deux fils?*

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\alpha}{\alpha_1}\frac{s_1}{s} = \frac{\alpha}{\alpha_1}\frac{d_1^2}{d^2}.$$

Mais, comme les Tables ne donnent pas la valeur de α_1 pour le bronze Weiler, nous introduirons en place de $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, dans la formule, le rapport des résistances de deux fils de même diamètre et de même longueur, qui est égal à $\frac{1,227}{0,034}$. Il vient donc

$$\frac{R}{R_1} = \frac{1,227}{0,034} \times \frac{\overline{0,4}^2}{\overline{0,15}^2} = 270.$$

La résistance du fil de bronze est 270 fois moindre.

3. *La résistance d'un fil de cuivre est de 2 ohms à zéro; quelle sera-t-elle à 15°?*

La Table des accroissements de résistance par degré d'augmentation de température résout la question. Le multiplicateur sera

$$0,388 \times 10^{-2} \times 15 = 0,0582.$$

La résistance sera égale à

$$2 \times 0,0582 = 2,1164 \text{ ohms}.$$

4. *On plie en deux un fil; que devient sa résistance quand on forme un conducteur de ses deux moitiés réunies?*

Elle devient quatre fois moindre.

5. *On met en circuit 5 bunsens et un galvanomètre d'une très grande résistance, dont on se propose de mesurer la résistance; on observe une déviation α. La même déviation est reproduite avec 2 bunsens, avec le galvanomètre shunté au $\frac{1}{10}$ et avec un rhéostat donnant 23 ohms de résistance. Déduire de cette opération la valeur de la résistance cherchée.*

Dans le premier cas, nous avons

$$I = \frac{nE}{nr + x}.$$

Dans le second,

$$I = \frac{1}{10}\,\frac{n'E}{n'r + R}.$$

Égalons ces deux valeurs de I :

$$10nE(n'r + R) = n'E(nr + x);$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= \frac{n}{n'}(10R + 9n'r) \\ &= \frac{5}{2}(230 + 9 \times 0,24 \times 2) \\ &= 585,8 \text{ ohms}. \end{aligned}$$

6. *Un pont de Wheatstone présente quatre coupures dans*

la règle dont les extrémités portent le fil divisé : soient a', a, b et b' les résistances insérées dans ces coupures. On remplace a' par une résistance R *à déterminer. Avec a', on avait une position d'équilibre x' et $l - x'$, l étant la longueur du fil: R donne x'_1 et $l - x'_1$. Calculer* R *sur ces données.*

Il est nécessaire de connaître dans cette expérience, due à M. Carpentier, la résistance ρ de l'unité de longueur du fil divisé.

La première expérience donnera

$$\frac{a' + \rho x'}{b' + \rho(l - x')} = \frac{a}{b}.$$

Pour la seconde, nous aurons

$$\frac{R + \rho x'_1}{b' + \rho(l - x'_1)} = \frac{a}{b}.$$

On en déduit

$$\frac{a}{b} = \frac{(a' - R) + \rho(x' - x'_1)}{\rho(x'_1 - x')}.$$

Il vient par suite

$$\begin{aligned} a' - R &= \frac{a}{b}\rho(x'_1 - x') - \rho(x' - x'_1) \\ &= (x'_1 - x')\rho\,\frac{a - b}{a}. \end{aligned}$$

On complète souvent cette opération en renversant la disposition de a et de b. On trouve alors des valeurs x''_1 et x'' au lieu des précédentes, et l'on peut écrire

$$\frac{b}{a} = \frac{(a' - R) + \rho(x'' - x''_1)}{\rho(x''_1 - x'')}.$$

Si l'on multiplie l'une par l'autre les deux équations en $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$, on trouve

$$1 = \frac{(a'_1 - R)^2 + (a' - R)[(x' - x'_1) + (x'' - x''_1)]\rho + \rho^2(x' - x'_1)(x'' - x''_1)}{\rho^2(x' - x'_1)(x'' - x''_1)}$$

et finalement

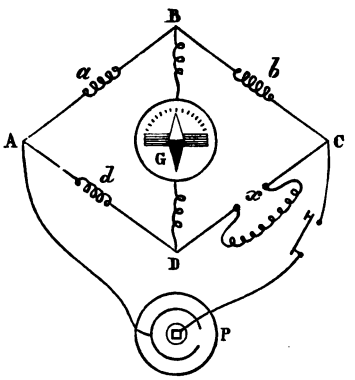
$$a' - R = \rho[(x' - x'_1) + (x'' - x''_1)].$$

C'est ainsi qu'on opère au bureau d'étalonnage du Ministère des Télégraphes, en France.

7. *Les branches d'un pont de Wheatstone ayant des résistances $a = 1000$ ohms et $d = 10$ ohms, on observe qu'on ne peut réaliser l'équilibre exact du pont; en effet, la résistance b étant réglée à 130 ohms, on obtient une déviation de $+5^{\text{div}}$, tandis que pour 131 ohms on relève une déviation de -6^{div}, de l'autre côté du zéro. Comment peut-on calculer néanmoins la valeur exacte de la résistance inconnue x?*

La solution de cet intéressant problème a été donnée par

Fig. 25.



M. Kempe dont nous reproduirons presque entièrement les calculs.

Soient i_a, i_b, i_x, i_d les intensités des courants dans les branches de résistances a, b, x et d, i l'intensité dans le pont, I l'intensité dans le circuit APC; G est la résistance du galvanomètre placé sur le pont et R la résistance de la pile et des fils d'attache. Les lois de Kirchhoff donnent six relations entre

la force électromotrice E, les résistances et les intensités :

$$(1) \qquad I = i_a + i_d,$$

$$(2) \qquad i_b = i + i_a,$$

$$(3) \qquad i_x = i_d - i,$$

$$(4) \qquad E = IR + id + i_x x,$$

$$(5) \qquad 0 = i_a a - i_d d - iG,$$

$$(6) \qquad 0 = i_x x - i_b b - iG.$$

De ce système d'équations il s'agit de déduire i, c'est-à-dire l'intensité du courant qui traverse le galvanomètre; pour cela, tirons i_a de l'équation (1) et substituons cette valeur dans les équations (2) et (5), les seules qui contiennent i_a; tirons de même i_d de l'équation (3), et portons sa valeur dans les équations (1), (4) et (5); même opération pour i_b et i_x; nous obtenons ainsi entre i et I les deux relations que voici :

$$(I - i)a - i(d + G) - (a + d)\frac{E - id - IR}{d + x} = 0$$

et

$$Ib + iG - (x + b)\frac{E - id - IR}{d + x} = 0.$$

Il reste à éliminer I entre ces deux équations, en les divisant l'une par l'autre; on obtient

$$\frac{[R(x + b) + b(d + x]}{[R(a + d) + a(d + x]} = -\frac{i(dG + xG + db + dx) + E(x + b)}{i(ax + dx + dG + xG) + E(a + d)};$$

d'où enfin

$$i = \frac{E(ax - db)}{\left\{\begin{array}{l} G[(a + b)(d + x) + R(a + d + x + b)] \\ \quad + R(x + b)(a + d) + dx(a + b) + ab(d + x) \end{array}\right\}},$$

équation que nous écrivons sous la forme

$$i = \frac{A}{B}.$$

L'équilibre a eu lieu lorsque

$$ax = bd, \qquad \text{soit} \qquad x = \frac{d}{a}\, b.$$

Appelons b' la résistance trop petite et b'' la résistance trop grande de l'essai : nous aurons

$$i' = \frac{E(ax - db')}{B'},$$

$$-i'' = \frac{E(ax - db'')}{B''}.$$

Or b' et b'' sont presque égaux; donc B' et B'' le sont aussi, et l'on peut écrire le rapport

$$-\frac{i'}{i''} = \frac{ax - db'}{ax - db''}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{d}{a}\,\frac{i'b'' + b'i''}{i' + i''}$$

ou, en tenant compte de ce que $b'' = b' + 1$,

$$x = \frac{d}{a}\left(b' + \frac{i'}{i' + i''}\right).$$

Passons aux valeurs numériques

$$x = \frac{10}{1000}\left(130 + \frac{5}{5+6}\right) = 1,304 \text{ ohm}.$$

La règle est très simple : on ajoute à la valeur la plus faible de la résistance b le quotient d'une déviation par la différence des déviations observées.

8. *Dans le pont de Wheatstone à fil, de M. Forster, on est amené quelquefois à introduire des résistances égales inconnues aux extrémités du fil divisé, dans des vides ménagés à cet effet dans les conducteurs de cuivre de l'instrument; comment peut-on évaluer ces résistances en longueurs équivalentes de fil à curseur?*

Intercalons dans les deux branches du pont deux résis-

tances connues, a et b, et plaçons le curseur dans la position qui réduit à zéro le courant du pont, nous aurons

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{1000 - m}.$$

Insérons maintenant, dans le vide de droite par exemple, la résistance dont on cherche la longueur équivalente m_1 en millimètres du fil à curseur; on fera une nouvelle lecture m' et l'on pourra encore poser

$$\frac{a}{b} = \frac{m' + m_1}{1000 - m'},$$

d'où

$$a(1000 - m) = bm,$$
$$a(1000 - m') = b(m' + m_1),$$
$$m_1 = (m - m')\frac{a + b}{b}.$$

9. *Deux résistances, que l'on veut comparer, sont placées bout à bout et attachées aux extrémités d'une pile de* 10 *éléments identiques, réunis en série. Entre le point de jonction des deux résistances et un point de la pile, on jette un pont contenant un galvanomètre sensible et l'on cherche quelle position du fil d'attache réduira le courant à zéro; on constate de la sorte que la pile doit être partagée en deux sections de* 4 *et de* 6 *éléments. Quel est le rapport des résistances?*

Égalons les intensités des courants des deux branches; ils sont égaux, puisque le pont est réduit à zéro.

Pour n_1 éléments en tout et deux sections, formées l'une de $n_1 - n$, l'autre de n éléments, on écrira

$$\frac{nE}{R + nr} = \frac{(n_1 - n)E}{R_1 + (n_1 - n)r} = \frac{n_1 E}{R + R_1 + n_1 r}.$$

Il en résulte que

$$\frac{R}{R_1} = \frac{n}{n_1 - n} = \frac{6}{4}.$$

10. *Dans le circuit d'une pile constante, on introduit à la*

suite deux boîtes de résistance A *et* B, *dont on débouche une série de résistances a et b, a' et b', a'' et b'', etc., telles que*

$$a + b = a' + b' = a'' + b'' = \ldots = R.$$

La force électromotrice de la pile est E *et sa résistance intérieure r; déterminer les différences de potentiel entre les bornes de* A *pour diverses valeurs de a.*

Appelons r la résistance des éléments de la pile et E leur force électromotrice :

$$x = E\frac{a}{r + R} = ka.$$

Les différences de potentiel sont proportionnelles à a.

M. Bouty a très heureusement adapté ce dispositif à la mesure des forces électromotrices, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus (Ch. IV, probl. 14).

11. *On introduit successivement dans le circuit d'une pile, de résistance intérieure négligeable, une résistance de* 10 *ohms, puis une autre résistance inconnue; déterminer cette résistance, sachant que les intensités du courant ont été égales à* 0,8 *et* 0,6 *ampère et que l'ampèremètre employé pour cette mesure a une résistance de* 1,5 *ohm.*

$$I(R + G) = I_1(x + G), \qquad I_1 x = I(R + G) - I_1 G,$$

$$x = \frac{I}{I_1}(R + G) - G,$$

$$x = \frac{0,8}{0,6}(10 + 1,5) - 1,5 = 13,8 \text{ ohms}.$$

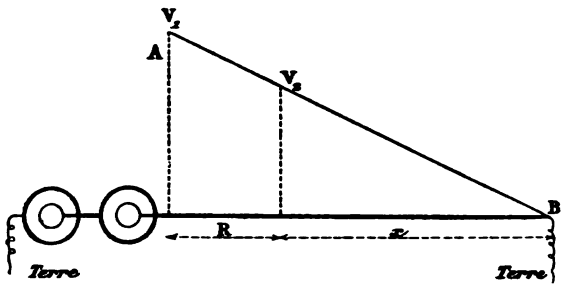
12. *Une pile, dont un des pôles est à la Terre, envoie son courant dans une boîte de résistances graduées et dans un fil de résistance x inconnue, relié lui-même au sol (fig.* 26); *pour une résistance* R *de* 60 *ohms dans la boîte, on trouve à l'électromètre des potentiels* V_1 *et* V_2 *égaux à* 2,8 *et* 1,5 *volts; calculer la résistance x du fil.*

La ligne AB marque la loi de décroissance des potentiels

et l'on a évidemment

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R + x}{x},$$

Fig. 26.



d'où

$$x = R \frac{V_2}{V_1 + V_2} = 56 \text{ ohms}.$$

Un grand nombre de problèmes sont simplifiés d'une manière remarquable par de semblables constructions graphiques dont il nous suffit d'avoir donné un seul exemple.

13. *On a à mesurer une très petite résistance x, que l'on veut comparer à l'unité de résistance; à cet effet, on intercale à la suite, dans le circuit d'une pile, l'ohm-étalon* AB *et le fil x (fig. 27), puis on relie les points* A *et* B *aux bornes d'un galvanomètre Thomson, shunté au $\frac{1}{100}$, de résistance* G, *et l'on règle sa déviation $d_1 = 30$ divisions par une résistance* R_1; *même opération pour* CD, *et détermination d'une déviation $d_2 = 28,5$ divisions par une résistance* R_2, *sans shunt. Déduire de ces deux opérations la valeur de x, sachant que* $R_1 = 170$ *ohms,* $R_2 = 210$ *ohms et* $G = 25$ *ohms.*

Soit V_1 la différence de potentiel entre A et B; le courant I_1 qui traverse le galvanomètre est égal à

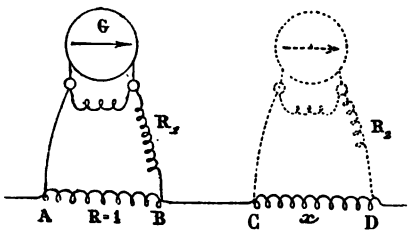
$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + G'} \times \frac{I}{100} = k\, d_1.$$

En appelant de même V_2 la différence de potentiel entre C et D, nous aurons

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2 + G} = k' d_2.$$

Dans la première équation, G′ est la résistance totale du

Fig. 27.



galvanomètre et du shunt; dans la seconde, G est la résistance seule de l'instrument; mais nous savons que

$$(24) \qquad G' = \frac{1}{\frac{1}{G} + \frac{1}{S}} = \frac{G}{\frac{G+S}{S}} = \frac{G}{n} = \frac{G}{100}.$$

Il vient donc

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{V_1(R_2 + G)}{V_2\left(R_1 + \frac{G}{100}\right)100} = \frac{V_1(R_2 + G)}{V_2(100R_1 + G)}.$$

D'autre part,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{x}.$$

On en déduit

$$x = \frac{d_2}{d_1}\,\frac{R_2 + G}{100R_1 + G} = \frac{28,5}{30}\,\frac{510 + 25}{100 \times 172 + 25} = 0,029 \text{ ohms}.$$

14. *Une pile donne un courant de 2 ampères quand elle ne comprend dans son circuit qu'un ampère-mètre; cette inten-*

sité tombe à 0,325 *ampère et* 0,191 *ampère quand on introduit d'abord dans le circuit une résistance d'un ohm, puis une résistance inconnue* x; *calculer* x.

Soit $\rho + G$ la résistance de l'ampère-mètre et des fils de jonction, et I l'intensité du courant;

$$I = \frac{E}{\rho + G}.$$

Nous aurons ensuite

$$I_1 = \frac{E}{\rho + G + 1}, \qquad I_2 = \frac{E}{\rho + G + x}.$$

Nous connaissons donc x :

$$x = \frac{I - I_1}{I - I_2}\,\frac{I_2}{I_1} = 3,4 \text{ ohms}.$$

15. *On veut comparer une boîte de résistance à un étalon mercuriel type, parfaitement exact; à cet effet, on emploie le pont de Wheatstone et l'on équilibre le galvanomètre en établissant des dérivations sur les résistances à comparer. L'équilibre est obtenu quand l'ohm-type a une dérivation formée d'un fil de longueur* l *et la boîte une dérivation de longueur* l'. *Quelle est la valeur de* x *en fonction de* R, *les deux fils étant identiques de section et de nature?*

(22) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{l}.$$

$$x = \frac{R}{1 + R\,\dfrac{l' - l}{ll'}}.$$

C'est le procédé employé par M. Guillaume.

16. *Une pile de* 25 *éléments Callaud, montés en série (fig.* 28), *est employée à charger un condensateur* C; *puis, les premières communications étant supprimées, les bornes du condensateur sont rattachées à celles du galvanomètre* G, *qui est traversé par*

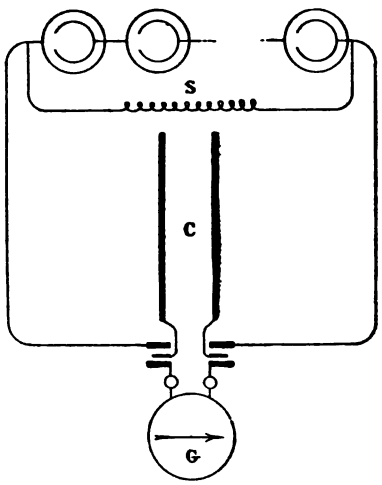
un courant de décharge et qui marque une déviation $\alpha = 15°$. *On répète les mêmes essais après avoir shunté la pile par une résistance* S *de* 50 *ohms : la déviation* $\alpha_2 = 8°$. *En déduire la résistance intérieure r de la pile.*

Avant l'emploi du shunt, on peut admettre que

$$\alpha_1 = \frac{E}{R + r};$$

R désignant la résistance fort grande du condensateur. Avec

Fig. 28.



le shunt S, on aura

$$(21) \qquad \alpha_2 = \frac{E}{R + r\dfrac{S}{r+S}}\,\frac{S}{r+S} = \frac{ES}{R(r+S) + rS}.$$

Égalant ces deux valeurs de E, on obtient

$$\alpha_1(R + r) = \alpha_2\,\frac{Rr + RS + rS}{S}$$

et

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{Rr + RS + rS}{RS + rS} = \frac{r + S + \frac{rS}{R}}{S + \frac{rS}{R}} = \frac{r + S}{S}.$$

Enfin

$$r = S\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2} = 50 \times \frac{15 - 8}{8} = 43{,}75 \text{ ohms};$$

soit, par élément Callaud, 1,75 ohm.

CHAPITRE XI.

DÉRIVATIONS.

1. *Une source au potentiel de* 22 *volts alimente un conducteur de* 1200^m *de longueur, ayant une résistance de* 0,15 *ohm par mètre; or, en deux points, situés à* 100^m *d'une extrémité et à* 350^m *de l'autre, on établit une dérivation avec un fil de même résistance, ayant* 1100^m *de longueur. Quelle est l'intensité du courant dans le circuit principal et dans les deux circuits dérivés?*

Le circuit unique a une longueur de $1200 - 450 = 750^m$ et une résistance de 112,5 ohms.

Les dérivations ont des résistances

$$R' = 450 \times 0,15 = 67,5 \text{ ohms}$$

et

$$R'' = 1100 \times 0,15 = 165 \text{ ohms.}$$

La formule (21) nous donne, pour l'intensité du courant principal,

$$I = \frac{22 \times 232,5}{112,5 \times 67,5 + 112,5 \times 165 + 67,5 \times 165} = 0,137 \text{ ampère.}$$

Quant aux deux courants dérivés, nous savons par les lois de Kirchhoff que

$$I' + I'' = I$$

et

$$(20) \qquad \frac{I'}{I''} = \frac{R''}{R'} \quad \text{ou} \quad I' = I\,\frac{R''}{R' + R''}.$$

Il vient par suite

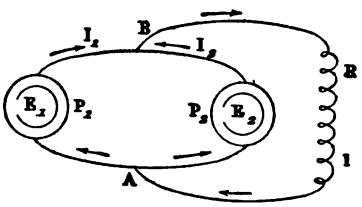
$$I' = 0,097 \text{ ampère},$$
$$I'' = 0,040 \text{ ampère}.$$

La résistance réduite de la dérivation est donnée par l'équation

$$(21) \qquad x = \frac{R'R''}{R' + R''} = 47,9 \text{ ohms}.$$

2. *Deux piles de force électromotrice* E_1 *et* E_2 *sont montées en quantité, et elles travaillent sur un circuit extérieur de résistance* R; *leurs résistances intérieures sont* r_1 *et* r_2; I, I_1 *et* I_2 *sont les intensités des courants dans les circuits* BRA, BP_1A *et* BP_2A; *quelle valeur de* R *annule le courant* I_2 (*fig.* 29)?

Fig. 29.



Les deux piles sont assemblées par leurs pôles de même nom; dans certaines conditions la pile E_2 serait électrolysée : c'est lorsque R est très grand; une valeur moindre de la résistance annulera I_2. Considérons d'abord le circuit AP_2B comme dérivé par rapport à la pile P_1; il serait traversé par un courant d'intensité $\frac{+E_1R}{Rr_1 + Rr_2 + r_1r_2}$; mais la force électromotrice E_2 donnerait naissance à un courant $\frac{-E_2(r_1 + R)}{Rr_1 + Rr_2 + r_1r_2}$.

Il vient donc

$$I_2 = \frac{E_1R - E_2(r_1 + R)}{Rr_1 + Rr_2 + r_1r_2}.$$

Ce courant sera nul lorsque nous aurons

$$R = \frac{E_2}{E_1 - E_2} r_1.$$

3. *Quatre conducteurs de résistances* R, R′, R″, R‴ *réunissent deux points d'un circuit; quelle est la résistance entre ces deux points?*

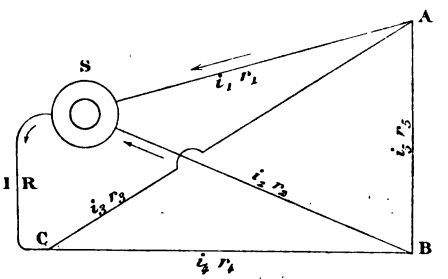
$$(22)\qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} + \frac{1}{R'''},$$

$$x = \frac{R'R''R''' + RR''R''' + RR'R''' + RR'R''}{RR'R''R'''} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} + \frac{1}{R'''}}.$$

La solution est simple, mais le calcul laborieux.

4. *Une source* S, *de force électromotrice* E, *alimente un circuit complexe* SABCS, *disposé comme l'indique la fig.* 30; *le*

Fig. 30.



courant en SC *a une intensité* I; *quelle est l'intensité du courant dans la branche* AB, *en fonction des résistances des autres branches et de ce courant* I?

Les lois de Kirchhoff donnent d'abord

$$\Sigma i = 0 \begin{cases} I = i_1 + i_2, \\ i_1 = i_3 + i_5, \\ i_4 = i_2 + i_5. \end{cases}$$

Nous avons de plus

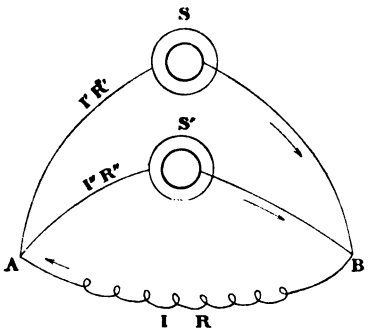
$$E = \Sigma ir \begin{cases} \text{en SAB} : i_1 r_1 - i_2 r_2 + i_5 r_5 = 0, \\ \text{en ABC} : i_3 r_3 - i_4 r_4 - i_5 r_5 = 0, \\ \text{en SACS} : i_1 r_1 + i_3 r_3 + IR = E. \end{cases}$$

En substituant, on obtient

$$i_5 = \mathrm{I}\,\frac{r_2 r_3 - r_1 r_4}{r_5(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + (r_1 + r_3)(r_2 + r_4)}.$$

5. *Deux sources* S *et* S′, *de forces électromotrices égales à* E *et* E′, *de résistances intérieures* r *et* r', *desservent le même*

Fig. 31.



circuit AB, *de résistance* R; *quelle est l'intensité du courant en* AB?

Appliquons encore les lois de Kirchhoff :

$$\mathrm{I}' + \mathrm{I}'' = \mathrm{I},$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{I}'(\mathrm{R}' + r) + \mathrm{IR},$$
$$\mathrm{E}' = \mathrm{I}''(\mathrm{R}'' + r') + \mathrm{IR}.$$

Par soustraction, il vient

$$\mathrm{I}'(\mathrm{R}' + r) - \mathrm{I}''(\mathrm{R}'' + r') = \mathrm{E} - \mathrm{E}',$$

d'où

$$\mathrm{I}' = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{E}'}{\mathrm{R}' + r} + \mathrm{I}''\,\frac{\mathrm{R}'' + r'}{\mathrm{R}' + r}$$

et

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{E}'}{\mathrm{R}' + r} + \mathrm{I}''\,\frac{[(\mathrm{R}' + r') + (\mathrm{R}'' + r')]}{\mathrm{R}' + r}.$$

On en déduit I″ en fonction de I, puis par substitution I′ en fonction de I, et l'on obtient finalement

$$I = \frac{E(R' + r) + E'(R'' + r')}{R(R' + r) + R(R'' + r') + (R' + r)(R'' + r')}.$$

6. *Un fil de cuivre, de* 1^m *de longueur, est tendu sur une table entre les bornes* A *et* B *d'un galvanomètre, pour lequel il jouera le rôle d'un shunt. Les prises de courant se font par la borne* A *et par une borne mobile* C, *qu'on peut faire glisser le long du fil* AB. *Or un courant* I_1 *donne une déviation déterminée pour une longueur* AC *de* 25^{cm}; *un autre courant* I_2 *produit la même déviation pour* $AC = 62^{cm}$. *Dans quel rapport sont les intensités* I_1 *et* I_2?

Appelons S la résistance variable du shunt AC et G celle des spires du galvanomètre et de la portion CB du fil : nous aurons évidemment pour toutes les positions de C

$$S_1 + G_1 = S_2 + G_2 = \text{const.}$$

Soit I l'intensité du courant dans le galvanomètre; comme la déviation reste la même, nous pouvons écrire

$$I = I_1 \frac{S_1}{S_1 + G_1} = I_2 \frac{S_2}{S_2 + G_2},$$

d'où

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{S_2}{S_1} \frac{(S_1 + G_1)}{(S_2 + G_2)} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{62}{25} = 2,48.$$

Si le fil est bien régulier et parfaitement homogène, ce shunt variable peut être utilisé pour la comparaison rapide de deux intensités de courant.

CHAPITRE XII.

EFFETS THERMIQUES DES COURANTS.

1. *Un circuit est constitué par des fils de cuivre, de fer et de maillechort mis bout à bout, de longueurs différentes, mais de même section. Quel est le rapport des quantités de chaleur dégagées dans chacune des portions du circuit?*

L'intensité du courant étant la même dans tout le circuit, les quantités de chaleur seront proportionnelles aux produits des longueurs respectives des fils par la résistance spécifique du métal, $l\alpha$.

Les Tables donnent les valeurs de α (page 74).

2. *Quelle est la quantité de chaleur dégagée par heure dans une lampe à incandescence de* 16 *bougies, ayant à chaud une résistance de* 32 *ohms et exigeant une différence de potentiel de* 40 *volts?*

$$w = AI^2Rt = A\frac{E^2}{R}t. \tag{25}$$

En fonction des unités pratiques, et en passant par le kilogrammètre, nous aurons

$$w = \frac{\overline{40}^2}{425 \times 32 \times 9,81} \times 3600 = 43,1 \text{ calories.}$$

On aurait pu exprimer les grandeurs électriques en U.E.M. et passer par l'erg : on aurait eu identiquement

$$w = \frac{(40 \times 10^8)^2}{4,16 \times 10^{10} \times 32 \times 10^9} \times 3600 = 43,1 \text{ calories.}$$

Le premier calcul est plus court, et il y a lieu de le préférer au second.

3. *Une pile de* 50 *éléments Daniell, montés en série, alimente un circuit formé de* 40^m *de câble, ayant une résistance de* 0,002 *ohm par mètre courant et de* 30^{cm} *de fil de fer de grande résistance ayant* $0^{cm},05$ *de diamètre; combien de calories seront dégagées en une minute dans ce fil?*

L'intensité I du courant est égale à

$$\frac{50 \times 1,07}{50 \times 1,5 + 0,08 + x},$$

en appelant x la résistance à calculer du fil de fer.

$$x = \frac{\alpha l}{S} = \frac{9,636 \times 10^3 \times 30}{0,001963} = 0,147 \times 10^9 \text{ U.E.M.},$$
$$= 0,147 \text{ ohm}.$$

Il vient donc

$$I = \frac{50 \times 1,07}{50 \times 1,5 + 0,08 + 0,147} = 0,711 \text{ ampère}.$$

L'énergie disponible dans le fil de fer par seconde est égale à $\frac{I^2R}{9,81}$ kilogrammètres; la chaleur dégagée sera donc, par minute,

$$\frac{I^2R \times 60}{9,81 \times 425} = \frac{0,147 \times \overline{0,711}^2 \times 60}{4169,25} = 0,0015 \text{ calorie}.$$
$$= 1,5 \text{ calorie-gramme}.$$

On aurait pu traiter ce problème autrement, en calculant la différence de potentiel e entre les deux extrémités du fil de fer : l'énergie disponible eût été égale à $\frac{e^2}{x}$, et la chaleur dégagée par minute serait $\frac{e^2 \times 60}{x \times 9,81 \times 425}$. Pour obtenir e, on posera

$$\frac{e}{E} = \frac{0,147}{50 \times 1,5 + 0,08 + 0,147}.$$

Le calcul donne

$$e = 0,00018E = 0,095 \text{ volt.}$$

Ce faible résultat tient à l'énorme résistance intérieure de la source.

4. *Un courant constant traverse un fil de platine résistant dont on fait progressivement augmenter la longueur; quelle est l'influence de cet allongement sur la température du fil si le courant est maintenu constant?*

$$w = AW = AI^2Rt = lSCD\theta;$$

dans cette équation, R est la résistance du fil, l sa longueur, S sa section, D sa densité, C sa chaleur spécifique, t la durée de l'expérience en secondes, et θ l'accroissement de température produit par le passage du courant d'intensité I; or on pourrait encore écrire

$$AI^2Rt = AI^2\frac{\alpha l}{S} = lSCD\theta.$$

D'où, toutes réductions faites,

$$\theta = AI^2\frac{t}{S^2D}\frac{\alpha}{C}.$$

La longueur l a disparu : l'influence de la longueur est donc nulle lorsque l'intensité du courant reste constante et lorsque l'on peut négliger le refroidissement par la conductibilité des attaches et le rayonnement extérieur.

5. *On veut produire w calories par seconde dans l'anse coupante d'un galvanocautère, de résistance R_1 à l'aide d'éléments Poggendorff, qu'on montera de la manière la plus convenable: dire combien il faudra assembler d'éléments et comment on les accouplera.*

Formons m séries de n éléments; leur résistance totale sera $\frac{nr}{m}$ et il faudra que $nr = mR$; la résistance totale sera

donc $2R$, et l'intensité du courant deviendra

$$I = \frac{nE}{2R}.$$

Il se dégagera le même nombre de calories dans la pile et dans le conducteur, soit en tout une quantité $2w$.

Or la quantité de chaleur dégagée par le courant d'intensité I, dans la résistance extérieure R, est

$$w = AI^2Rt = A\frac{n^2E^2}{4R}.$$

Donc

$$n = \sqrt{\frac{4Rw\mathrm{J}}{E^2}};$$

J est l'équivalent mécanique de la chaleur.

On sait donc que

$$m = n\frac{r}{R} = \frac{r}{R}\sqrt{\frac{4Rw\mathrm{J}}{E^2}}.$$

Il faudra employer $N = mn = \frac{4w\mathrm{J}r}{E^2}$ éléments.

6. *Un fil de fer de* $0^{cm},04$ *de diamètre est maintenu au rouge blanc, soit à* 1000°, *par un courant de* 18 *ampères; quel est le pouvoir émissif h du fer incandescent?*

La permanence du régime permet d'égaler la chaleur du courant à la perte de calorique dans l'air.

Pour un excès ε de température, nous aurons

$$w = AI^2Rt = \pi dlh\varepsilon t$$

ou

$$AI^2\frac{\alpha l}{S} = AI^2\frac{\alpha l}{\frac{\pi d^2}{4}} = \pi dlh\varepsilon,$$

d'où

$$h = \frac{4AI^2\alpha}{\pi^2 d^3\varepsilon} = 0,0048 \text{ unités C.G.S.}$$

Ce coefficient h se déduit donc de l'observation de ε et de I :

il est rapporté au centimètre carré et à la seconde et nous l'avons exprimé en calories-grammes.

On aurait 0,048 calorie en grandes calories par mètre carré.

7. *Deux bobines, formées l'une d'un fil de maillechort, l'autre d'un fil de cuivre de même longueur, sont traversées par le même courant; quel doit être le rapport des diamètres de ces fils pour que l'augmentation de résistance due à leur échauffement par le courant soit la même?*

Nous avons calculé ci-dessus (Problème 4) l'échauffement θ produit dans un temps t par un courant d'intensité I :

$$\theta = \mathrm{AI}^2 \frac{t\alpha}{\mathrm{S}^2\mathrm{DC}}.$$

Les échauffements des deux fils de maillechort et de cuivre sont donc dans un rapport connu

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{\mathrm{S}'^2\mathrm{D}'\mathrm{C}'\alpha}{\mathrm{S}^2\mathrm{DC}\alpha'} = \frac{d'^4\mathrm{D}'\mathrm{C}'\alpha}{d^4\mathrm{DC}\alpha'}.$$

Les accroissements de résistance sont donnés par les Tables; ils doivent être égaux.

Soit a l'accroissement par degré :

$$a\theta = a'\theta'$$

ou

$$a\frac{\mathrm{AI}^2 t\alpha}{\mathrm{S}^2\mathrm{DC}} = a'\frac{\mathrm{AI}^2 t\alpha'}{\mathrm{S}'^2\mathrm{D}'\mathrm{C}'},$$

ou enfin

$$\frac{a\alpha}{d^4\mathrm{DC}} = \frac{a'\alpha'}{d'^4\mathrm{D}'\mathrm{C}'}.$$

Il vient, par suite,

$$\frac{d^4}{d'^4} = \frac{a\alpha}{a'\alpha'}\frac{\mathrm{D}'\mathrm{C}'}{\mathrm{DC}} = 1,58.$$

Le diamètre du fil de maillechort sera donc 1,12 fois plus grand que celui du fil de cuivre; le rapport $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'}$ des sections sera 1,26.

8. *Quelle condition doit remplir un shunt de galvanomètre*

pour que le rapport des résistances de ce shunt et du galvanomètre ne soit pas troublé par l'échauffement résultant du passage du courant; on supposera que les deux circuits sont en fil de cuivre et que le pouvoir multiplicateur du shunt est égal à 100.

Ce problème se traite comme le précédent; mais a, α, C et D sont égaux à a', α', C′ et D′.

Nous aurons donc

$$\frac{I^2}{S^2} = \frac{I'^2}{S'^2}$$

ou

$$\frac{I}{S} = \frac{I'}{S'}.$$

Il faut conséquemment que la densité du courant soit la même dans les deux branches, c'est-à-dire que l'intensité par unité de section soit la même. Or, dans le cas proposé, l'intensité I du courant dans le shunt est 99 fois plus grande que ne l'est celle de I′ dans le galvanomètre.

Par suite,

$$\frac{I}{I'} = 99 = \frac{S}{S'}.$$

Les sections devraient donc être dans le même rapport, ce qui est le plus souvent impraticable; voilà pourquoi l'on fait fréquemment les dérivations de shuntage en maillechort.

Les fils n'étant plus de même nature, on aura

$$\frac{\frac{I}{S}}{\frac{I'}{S'}} = \sqrt{\frac{DC.a'\alpha'}{D'C'.a\alpha}}.$$

9. *Une amorce explosive en platine de* $0^{cm},3$ *de long,* $0^{cm},005$ *de diamètre, a une résistance de* 0,14 *ohm et il faut qu'elle atteigne une température de* 700° *pour provoquer la détonation de l'explosif; quel temps* x *sera nécessaire pour qu'un courant de* 0,5 *ampère produise la mise du feu?*

$$AI^2Rx = lSDC\theta.$$

Or, en U.E.M.,

$$I = 0,05, \qquad R = 0,14 \times 10^9 = 14 \times 10^7;$$

exprimons lSD en grammes; la chaleur développée sera énoncée en calories-grammes.

Il vient

$$\frac{0,05 \times 14 \times 10^9}{4,17 \times 10^7} x = 0,0000196 \times 21,45 \times 0,3 \times 0,0324 \times 700$$
$$x = 0,35 \text{ seconde.}$$

10. *Un coupe-circuit de sûreté, en métal fusible, doit interrompre le circuit, dès que le courant atteindra une intensité de* 20 *ampères; quel sera son diamètre?*

Il faut connaître la température de fusion T et la chaleur latente de fusion γ du métal employé; on écrira que la chaleur du courant est égale à la chaleur perdue par émission vers l'extérieur augmentée du calorique de fusion. Pour simplifier, nous supposerons que le fil soit plongé dans un milieu à zéro; soit h le coefficient de déperdition extérieure.

$$AI^2R = \pi dlhT = \frac{\pi d^2}{4} lCD(\gamma + T)$$

ou

$$AI^2 \frac{l\alpha}{\frac{\pi d^2}{4}} = \pi dlhT + \pi \frac{d^2}{4} lCD(\gamma + T);$$

l'équation est du quatrième degré en d, mais il est intéressant de constater que l disparaît du calcul.

Nous avons négligé le refroidissement par les attaches. Cette formule n'est donc pas rigoureuse.

En réalité, les électriciens préfèrent se laisser guider par l'expérience que par un calcul incomplet et ils emploient généralement une relation empirique.

11. *M. Preece a donné la formule suivante pour les coupe-circuits en plomb :*

$$I = 10,8\, d^{\frac{3}{2}}.$$

Quelle est la section du fil en millimètres carrés par ampère?

Pour un ampère, nous aurons

$$d^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{10,8},$$

d'où

$$d = \sqrt[\frac{3}{2}]{\frac{1}{10,8}}$$

et

$$S = \frac{\pi}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{10,8}} = 0^{mm^2},355.$$

Quelques électriciens prennent une section beaucoup moindre.

12. *Démontrer que, pour une bobine d'un volume donné, la chaleur dégagée dans le fil est la même, à égalité de flux, quel que soit le nombre de spires.*

Cette proposition a une grande importance pour la construction des électro-aimants, car l'échauffement du fil entraîne toujours une certaine perte d'énergie.

Soit N le nombre de tours de fil et I le courant excitateur.

Le flux magnétique est proportionnel à NI, c'est-à-dire aux ampère-tours; d'autre part, l'échauffement est proportionnel à I^2R, R étant la résistance du fil. Or R varie comme le carré de N, si le volume reste constant, car, la section du fil devenant moitié moindre, la résistance par unité de longueur double ainsi que la longueur et, en somme, R croît comme le carré de N.

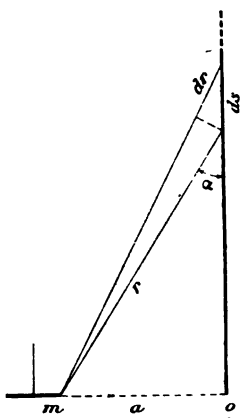
La chaleur dégagée est donc proportionnelle à N^2I^2, c'est-à-dire au carré du flux; à égalité de pouvoir, elle sera par conséquent la même. C. Q. F. D.

CHAPITRE XIII.

ACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET ÉLECTRODYNAMIQUES.

1. *Une aiguille aimantée est placée en face de l'extrémité inférieure d'un conducteur rectiligne, indéfini dans un sens, parcouru par un courant d'intensité* I; *son centre est à une distance a du pied du conducteur; sa longueur est très petite et elle possède à ses pôles une quantité m de magnétisme. Calculer la valeur du couple agissant sur cette aiguille.*

Fig. 32.



Nous savons que, dans l'air, l'action de l'élément ds sur un pôle m est égale à

$$df = \frac{m\,\mathrm{I}\,ds \sin\alpha}{r^2}. \tag{31}$$

Or nous avons

$$ds = \frac{dr}{\cos\alpha};$$

$$r = \frac{a}{\sin\alpha} \quad \text{et} \quad dr = \frac{-a\cos\alpha\, d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Il vient donc, après substitution,

$$df = \frac{m\mathrm{I}\sin\alpha\, d\alpha}{a}.$$

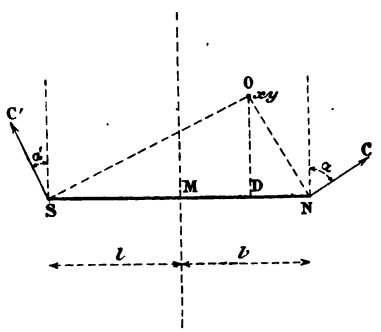
Nous en déduirons

$$f = \frac{m\mathrm{I}}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{m\mathrm{I}}{a}.$$

L'aiguille étant courte, on peut admettre que les actions sont identiques sur les deux pôles et l'on déduit aisément la valeur du couple de la connaissance de f.

2. *Une aiguille aimantée est placée sur un flotteur, qui lui permet non seulement de s'orienter, mais encore de se déplacer; on la soumet à l'action d'un courant horizontal indéfini* O,

Fig. 33.



dont la projection D *passe en dehors de son centre. Quelle est la position d'équilibre stable de cette aiguille?*

L'aiguille commence par tourner sur elle-même pour se

déplacer dans la direction des forces qui portent son pôle nord à la gauche du courant et son pôle sud à sa droite; ces forces NC et SC′ n'étant pas égales, l'aiguille se déplacera pour chercher à compléter sa position d'équilibre, qui correspond à l'égalité de ces deux forces.

Le courant étant indéfini dans tous les sens, l'action horizontale qu'il exerce sur les pôles est égale à

$$\frac{2mI}{ON}\sin\alpha \quad \text{et} \quad \frac{2mI}{OS}\sin\alpha'.$$

Or

$$\sin\alpha = \frac{OD}{ON} \quad \text{et} \quad \sin\alpha' = \frac{OD}{OS}.$$

Les deux forces sont donc

$$\frac{2mI \times OD}{\overline{ON}^2} = \frac{2mIy}{y^2 + (l - x)^2}$$

et

$$\frac{2mI \times OD}{\overline{OS}^2} = \frac{2mIy}{y^2 + (l + x)^2}.$$

Pour l'égalité, il faut que les deux dénominateurs soient égaux, ce qui suppose nécessairement que x soit égal à zéro; l'aiguille se déplacera par conséquent jusqu'à ce que son milieu M se projette sur la direction du courant.

3. *Un conducteur de forme quelconque, par exemple rectangulaire, est mobile autour d'un axe coïncidant avec celui d'un barreau aimanté (fig. 34); ce barreau renferme à son pôle une quantité de magnétisme m égale à 250 unités. Dès qu'on lance un courant de 0,2 ampère dans le conducteur, il se met à tourner; quel est le moment du couple de rotation par rapport à l'axe?*

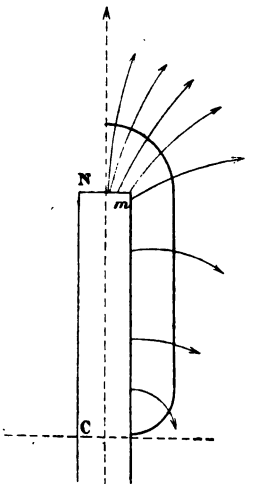
Pour un tour complet autour du pôle, le flux coupé par le conducteur est égal à $4\pi m$, si le conducteur descend jusqu'au milieu du barreau; le travail électromagnétique correspondant est, par suite, égal à $4\pi mI$; le couple a donc un moment

égal à

$$\frac{4\pi m I}{2\pi} = 2mI = 2 \times 250 \times 0,02 = 10 \text{ C.G.S.};$$

nous avons exprimé I en U.E.M.

Fig. 34.



4. *Calculer le travail nécessaire pour faire tourner de* 180° *un courant mobile flottant de de la Rive, orienté par l'action de la Terre et placé perpendiculairement au méridien; le champ terrestre a une intensité horizontale* $H = 0,192$, *le cercle mesure* 10^{cm} *de rayon et l'intensité du courant égale* 1 *ampère.*

La position d'équilibre correspond au maximum du flux de force à travers la face négative du circuit; dans cette position, l'énergie du courant est

$$W = -HIS; \tag{29}$$

après retournement du courant, face pour face, nous avons

$$W' = HIS.$$

Le travail dépensé contre les forces électromagnétiques

terrestres est, dans cette opération,

$$W' - W = 2HIS = 2 \times 0,192 \times 0,1 \times 314,16 = 12,06 \text{ ergs.}$$

Ce travail est difficilement mesurable; mais on sait que Weber a indiqué une méthode de détermination de la tangente de l'inclinaison par un procédé de retournement analogue, en mesurant au galvanomètre les quantités d'électricité induites dans la rotation d'une bobine plate autour de ses diamètres horizontal et vertical.

5. *Étant donné que la roue de Barlow se meut dans un champ magnétique uniforme, d'intensité* H', *parallèle à son axe, calculer le travail développé en un tour de roue par un courant d'intensité* I.

Soient R le rayon de la roue et θ l'angle de deux dents consécutives; on peut admettre qu'il y ait toujours une dent au contact du mercure. Le flux de force φ est égal au produit de la surface du secteur formé par les rayons correspondant à deux dents consécutives par l'intensité du champ

$$\varphi = H' \frac{R^2 \sin\theta}{2}.$$

Il en résulte que le travail $\Delta\mathfrak{T}$ développé dans la rotation θ est

$$\Delta\mathfrak{T} = IH' \frac{R^2 \sin\theta}{2} = IH' \frac{R^2\theta}{2};$$

pour un tour complet de la roue, nous aurons

$$\mathfrak{T} = IH'R^2\pi = IH'S;$$

le travail est donc égal à la surface de la roue multipliée par le produit IH' de l'intensité du courant par l'intensité du champ.

6. *Un conducteur tournant de Jamin se meut autour d'un pôle m; le circuit descend jusqu'au milieu de l'aimant. On demande la valeur du moment* M *du couple de rotation par rapport à l'axe, pour un courant d'intensité* I.

Le circuit embrasse dans son mouvement le flux total

émané du pôle et le travail électromagnétique dépensé par tour est égal à $4\pi m\mathrm{I}$; il en résulte que

$$\mathrm{M} = \frac{4\pi m\mathrm{I}}{2\pi} = 2m\mathrm{I}.$$

7. *Calculer l'attraction exercée par un fil de* 100^{cm} *de long sur un fil de* 10^{cm} *de longueur, parallèle, situé à* 3^{cm} *de distance du premier, les deux courants étant égaux à* 1 *ampère et de même sens.*

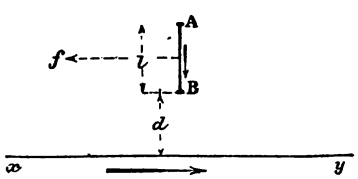
L'attraction sera sensiblement la même que si le conducteur fixe avait une longueur infinie; nous pourrons donc écrire

$$f = \frac{2\mathrm{II}'l}{d} = \frac{2\mathrm{I}^2 l}{d} = \frac{2 \times \overline{0,1}^2 \times 10}{3} = 0,07 \text{ dyne.}$$

8. *Un fil rectiligne* AB *de* 2^{cm} *de longueur est parcouru par un courant de* 1 *ampère; il peut se mouvoir parallèlement à lui-même le long d'un courant rectiligne indéfini* xy (*fig.* 35) *auquel il reste perpendiculaire. Quelle force agit sur le courant mobile? Le courant en* xy *a* 10 *ampères d'intensité et la distance* $\mathrm{AC} = d$ *est de* 2^{cm} : *le courant* xy *va de gauche à droite et* AB *est descendant.*

$$f = 2\mathrm{II}'\frac{l}{d}\left(1 - \frac{l}{2d}\right)$$
$$= 2 \times 0,1 \times 1 \times 1 \times \tfrac{1}{2} = 0,1 \text{ dyne.}$$

Fig. 35.



Le circuit mobile remontera donc le courant xy.

CHAPITRE XIV.

ÉLECTRO-AIMANTS.

1. *Un électro-aimant porte* 20^{kgm} *par centimètre carré, sur une section polaire de* 15^{cm^2}; *calculer l'intensité de son aimantation* (page 94).

$$P = 2\pi \mathfrak{I}^2 S,$$

$$\mathfrak{I} = \sqrt{\frac{P}{2\pi S}}.$$

Pour avoir $\mathfrak{I}$ en unités C.G.S., il faut évaluer P en dynes et S en centimètres carrés.

$$\mathfrak{I} = \sqrt{\frac{20000 \times 981}{2\pi}} = 1767 \text{ C.G.S.}$$

2. *On veut construire un électro en* U *capable de porter* 5^{kgm}, *sur une section de noyau cylindrique de* 1^{cm} *de diamètre : la perméabilité* μ *du fer est égale à* 325. *La longueur du circuit magnétique ne peut pas dépasser* 10^{cm}. *Combien faudra-t-il d'ampères-tours pour obtenir le résultat proposé?*

Ce problème pourrait être résolu théoriquement, mais il vaut mieux employer la formule pratique donnée à la page 80.

$$NI = 125 \frac{l}{\mu} \sqrt{\frac{F}{S}}.$$

Remarquons d'abord que, l'électro étant en U, la section agissante sera égale à la surface de deux cercles de 1^{cm} de diamètre; nous écrirons donc

$$S = 2 \times 0,7854 = 1^{cm^2},5708.$$

Il vient par suite

$$NI = 125 \times \frac{10}{325}\sqrt{\frac{5000}{1,57}} = 217 \text{ ampères-tours.}$$

Il faudra donc, pour 1 ampère par exemple, 217 spires, soit 110 sur chaque branche : un fil présentant, avec son enrobage, 1^{mm} de diamètre ne s'échauffera pas pour un courant de cette intensité. On pourra donc donner $2^{cm},5$ d'écartement aux deux branches et, pour chacune d'elles, $2^{cm},5$ de longueur, ce qui fait pour l la longueur fixée de 10^{cm}. Cinq couches de fil suffiront donc pour produire l'excitation, chaque couche comptant 22 spires.

3. *Quel est le flux de force produit par un électro, de section* S, *de longueur* l (*l est la longueur du circuit magnétique*), *formé d'un noyau de fer dont la perméabilité est* μ, *sur lequel sont enroulées* N *spires? Le courant aura une intensité* I.

Le flux de force φ est le quotient de la force magnétomotrice $\mathcal{F}_1$ par la résistance magnétique du circuit (page 9)

$$\varphi = \frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{R}}.$$

Or

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu}\frac{l}{S},$$

car la perméabilité magnétique est un coefficient analogue à la conductibilité magnétique.

Il vient donc

$$\varphi = \frac{\mathcal{F}_1 \mu S}{l}.$$

Mais la cause du flux de force, ou la force magnétomotrice, a pour expression $4\pi NI$: nous écrirons par suite

$$\varphi = \frac{4\pi NI \mu S}{l}.$$

Il est inutile peut-être de faire observer que la force ma-

gnétomotrice a la même expression que H, l'intensité du champ, et se confond avec lui.

4. *Un électro a un moment magnétique* $\mathfrak{M} = 200$ C.G.S. *quand* $I = 1,5$ *ampère; ce moment devient* 365, *lorsque* I *double de valeur. Déduire de cet essai la valeur des paramètres a et b de la formule de Fröhlich.*

Nous avons

$$\mathfrak{M} = 200 = \frac{0,15}{a + b \times 0,15},$$

$$\mathfrak{M}' = 365 = \frac{0,30}{a + b \times 0,30},$$

car I doit être exprimé en U.E.M.

Résolvant pour a et b, nous trouvons

$$200a + 30b = 0,15,$$
$$365a + 109,5b = 0,30.$$

$$35a = 49,5b,$$
$$a = 1,41b,$$
$$252b = 0,15,$$
$$b = 0,00059,$$
$$a = 0,00083.$$

5. *Entourons un petit électro d'un cylindre électro-magnétique de n spires, qui occupera son milieu sans atteindre à ses extrémités, et renversons alors brusquement le courant excitateur de l'électro : on constate, par un galvanomètre balistique, qu'une quantité q d'électricité induite est mise en mouvement dans la bobine enveloppante. Calculer d'après cela le flux d'induction de l'électro pour un courant* I, *la résistance étant* R.

La quantité q d'électricité induite est donnée par la formule

$$q = \frac{2n\varphi}{R}; \tag{37}$$

d'où

$$\varphi = \frac{qR}{2n}.$$

6. *Un électro est formé d'un noyau en fer recouvert de cinq couches de fil contenant chacune* 100 *spires. Par suite d'un accident, on est amené à le remplacer par un électro de même longueur, dont le noyau a la même perméabilité, mais qui est recouvert de quatre couches de* 105 *spires. Quel devra être le rapport des courants d'excitation pour obtenir la même intensité du champ?*

Toutes choses égales d'ailleurs, l'intensité du champ de l'électro est proportionnelle aux ampères-tours; il faudra donc, pour l'égalité du champ, que $I_1 n_1 = I_2 n_2$, d'où

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{500}{420} = 1,19.$$

7. *On introduit un barreau de fer de section* S *et de longueur* l *dans une bobine cylindrique, formée de* n_1 *spires par unité de longueur et traversée par un courant d'intensité* I; *le fer a un coefficient de susceptibilité* $\varkappa$; *quel est le travail dépensé dans l'aimantation de ce barreau?*

Si nous connaissions le coefficient de self-induction de la bobine, L_s, nous pourrions calculer le prix de l'établissement du courant; en effet,

$$W = \tfrac{1}{2} L_s I^2. \tag{44}$$

Nous calculerons L_s dans une étude suivante (voir *Problème* 8, Chap. XVI); mais, dans ce calcul, nous supposerons connus les rayons des bobines. Cette donnée nous manque ici.

Nous y suppléerons de la manière suivante.

Le flux à travers une spire est $4\pi n_1 S_1$, si nous appelons S_1 la section de la bobine.

Il sera, pour N spires, $4\pi n_1 SN = 4\pi n_1^2 l S_1$; on peut donc admettre que

$$L_s = 4\pi n_1^2 l S_1,$$

et

$$W = 2\pi n_1^2 I^2 l S_1.$$

L'introduction du barreau de section S fait passer L_s à la nouvelle valeur

$$4\pi n_1^2 l (S' + 4\pi\varkappa S).$$

L'énergie dépensée est donc

$$2\pi n_1^2 l(S' + 4\pi\varkappa S);$$

la différence donne le travail d'aimantation qui est égal à

$$2\pi n_1^2 I^2 l(4\pi\varkappa S) I^2 = 8\pi^2 n_1^2 \varkappa l S I^2.$$

Cette énergie se retrouve sous forme de chaleur dans les noyaux des électros subissant une série d'aimantations successives [1].

8. *Dans une bobine cylindrique de grande longueur, ayant* 6^{cm} *de rayon intérieur et comptant* n_1 *spires par unité de longueur, on fait passer un courant de* 10 *ampères, et l'on y introduit un noyau de fer doux. Il se produit un flux* φ *égal à* 11767 C.G.S. *qu'on mesure par le procédé d'une bobine auxiliaire occupant le milieu de la bobine cylindrique; en supprimant brusquement le courant excitateur, on calcule* φ *par la quantité d'électricité induite. Quel est le coefficient de susceptibilité de l'échantillon de fer mis en expérience?*

L'intensité du champ intérieur de la bobine de grande longueur est $4\pi n_1 IS$; le flux total φ sera donc

$$\begin{aligned}\varphi &= 4\pi n_1 IS(1 + 4\pi\varkappa)\\ &= 4\pi \times 8 \times 10 \times 10^{-1} \times 113,1(1 + 4\pi\varkappa).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\varkappa = 32.$$

Du même coup, on aurait eu μ :

$$\mu = 402.$$

Mais il ne faut pas oublier que $\varkappa$ et μ ne sont pas constants.

9. *On impose les conditions suivantes de construction pour un électro-aimant : son noyau de fer ayant un diamètre d, il*

---

[1] Les calculs théoriques relatifs aux électros ne sont qu'approchés, car il faut reconnaître que nous ne possédons pas de formules simples permettant de calculer de toutes pièces les éléments d'un électro devant produire un résultat déterminé.

ne faut pas que le diamètre extérieur de la bobine dépasse D ; *la hauteur de cette bobine doit être au plus égale à h et sa résistance électrique restera moindre que* R. *Quel nombre de spires comportera cet électro?*

Appelons v le volume maximum qu'on puisse faire occuper à la bobine : nous aurons, en fonction des données du problème,

$$v = \frac{\pi(D^2 - d^2)h}{4}.$$

Mais v n'est pas le volume réel du fil conducteur, car le guipage et l'isolant ont un volume égal au quart de celui du fil; le volume du cuivre est donc

$$\frac{3\pi(D^2 - d^2)h}{16}.$$

On peut aussi dire que ce volume est ls, l étant la longueur du fil et s sa section.

Or la résistance R est imposée et nous avons

$$R = \alpha \frac{l}{s}.$$

d'où

$$s = \alpha \frac{l}{R}.$$

Il vient, par suite,

$$\frac{3}{16}\pi(D^2 - d^2)h = ls = \alpha \frac{l^2}{R}.$$

On peut exprimer l en fonction du diamètre moyen de a bobine, et poser, pour n tours,

$$l = \pi\left(\frac{D + d}{2}\right)n.$$

De ces relations, nous déduisons

$$\frac{3}{16}\pi(D^2 - d^2)h = \frac{\alpha}{R}\pi^2\left(\frac{D + d}{2}\right)^2 n^2$$

et

$$n^2 = \frac{3}{4}\frac{R}{\pi\alpha}\frac{D-d}{D+d}h.$$

On pourra donc calculer, pour un courant donné, les ampères-tours et les propriétés de l'électro.

10. *Un électro-aimant a une gorge de volume v; quel diamètre faudra-t-il adopter pour le fil, si l'on veut obtenir l'effet maximum?*

Appelons l, s, R la longueur, la section et la résistance du fil, x son rayon nconnu, ε l'épaisseur du guipage, N le nombre de tours total, n le nombre de spires contenues dans l'unité de section de la bobine, normalement aux fils; soit λ la longueur d'une spire moyenne :

$$\lambda = \frac{l}{N}.$$

Le volume v_1 réel du cuivre est une fraction du volume libre de la gorge v, dont la valeur dépend du mode d'enroulement et de superposition des spires; v_1 peut être connu comme fonction de v [1].

$$v_1 = l\pi(x+\varepsilon)^2 = N\lambda\pi(x+\varepsilon)^2,$$

$$R = \alpha\frac{l}{s} = N\alpha\frac{\lambda}{\pi x^2}.$$

Soient r la résistance de la source et du circuit extérieur à l'électro et E la force électromotrice de la source :

$$i = \frac{E}{R+r}$$

---

[1] Il reste entre les fils un certain vide dont l'importance dépend de la manière dont on arrange les spires : si elles sont superposées, $\frac{v_1}{v}$ est égal au rapport des surfaces du cercle et du carré circonscrit, soit $\frac{\pi}{4}$. Il y a avantage à intercaler les spires; dans ce cas, $\frac{v_1}{v} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$, car c'est le rapport des surfaces du cercle et de l'hexagone circonscrit.

et

$$ni = k\frac{\mathrm{EN}}{\mathrm{R}+r},$$

car ni est évidemment proportionnel à N.

Il vient donc

$$ni = \frac{k\mathrm{E}}{\dfrac{\alpha\lambda}{\pi x^2} + \dfrac{r}{v_1}\lambda\pi(x+\varepsilon)^2}.$$

Il s'agit de rendre cette quantité maximum par un choix convenable de x; cherchons donc le minimum du dénominateur. Les deux termes qui le composent sont indépendants de N et leur produit est constant, si toutefois on donne à ε une valeur proportionnelle à x, comme cela se fait d'habitude. Dans ces conditions, il faut donc que

$$\mathrm{R} = r.$$

La résistance intérieure de l'électro doit dès lors être égale à la résistance extérieure.

Il en résulte que

$$s = \frac{\alpha l}{r} \quad \text{et} \quad s^2 = \frac{\alpha v_1}{r},$$

d'où

$$x = \sqrt[4]{\frac{\alpha v_1 \pi^2}{r}}.$$

11. *Le coefficient de self-induction d'un électro est égal à* 1,5 *quadrant; on rompt instantanément le circuit en* $\frac{1}{1000}$ *de seconde, sur un courant de* 5 *ampères. Quelle est la force électromotrice qui produit l'étincelle d'extra-courant?*

$$\mathrm{L}_s = 15 \times 10^{9\,\mathrm{cm}}.$$

Si θ désigne la durée de la rupture, la valeur moyenne de la force électromotrice induite est

$$\frac{1}{\theta}\int_0^\theta -\mathrm{L}_s\frac{di}{dt}\,dt = \frac{\mathrm{L}_s\mathrm{I}}{\theta} = \mathrm{E}.$$

Il vient donc

$$E = 1,5 \times 10^9 \times 0,5 \times 10^3 = 7500 \times 10^8 \text{ C.G.S.}$$
$$= 7500 \text{ volts.}$$

On aurait du reste pu écrire directement

$$E = 1,5 \times 5 \times 1000 = 7500 \text{ volts.}$$

Cette force électromotrice peut être réduite considérablement, soit par l'emploi d'un rhéostat en dérivation sur l'électro, soit plutôt en intercalant en dérivation un condensateur : on calcule la capacité minimum C nécessaire pour que la force électromotrice ne dépasse point E, par la condition que

$$\tfrac{1}{2} L_s I^2 \leqq \tfrac{1}{2} C E^2,$$

d'où il ressort que

$$C = L_s \frac{I^2}{E^2}.$$

12. *Un électro-inducteur est excité par* 1250 *ampères-tours; le fer au noyau a un coefficient moyen de susceptibilité* $\varkappa$ *égal à* 8; *l'électro est droit et il a une hauteur de* 280^{cm}; *quelle sera approximativement l'intensité du champ?*

La formule de M. Fröhlich, modifiée par M. Sylvanus Thompson, donne (p. 81)

$$G = \frac{2\pi}{l} = 0,0225,$$
$$H = G \times NI = 0,0225 \times 8 \times 1250$$
$$= 225 \text{ C.G.S.}$$

13. *Un électro-aimant, faisant l'office d'inducteur dans une machine de Gramme, est formé d'une culasse rapportée et de deux noyaux cylindriques dont le prolongement contitue les pièces polaires. Ces pièces ont, comme la culasse,* 7^{cm} *sur* 2^{cm}, *et les noyaux mesurent* $4^{cm},3$ *de diamètre; la longueur totale des lignes de force suivant l'axe des pièces est de* 10^{cm} *dans la culasse,* 15^{cm} *dans chaque noyau et* 12^{cm} *dans*

les pièces polaires. Quelle est la résistance du circuit magnétique de cet électro-inducteur?

(P. 9) $$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu s}.$$

Dans le cas particulier qui nous est proposé, nous aurons

$$\mathcal{R} = \frac{l_1}{\mu_1 s_1} + \frac{2 l_2}{\mu_2 s_2} + \frac{2 l_3}{\mu_3 s_3},$$

les indices 1, 2, 3 se rapportant à la culasse, aux noyaux et aux pièces polaires.

En faisant $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 100$ en moyenne, nous aurons

$$\mathcal{R} = \frac{10}{100 \times 14} + \frac{30}{100 \times 14,5} + \frac{24}{100 \times 14}.$$

Ce calcul nous servira quand nous entreprendrons de déterminer les éléments des machines.

CHAPITRE XV.

MESURE DES CHAMPS.

1. *On introduit dans le circuit d'une pile constante un voltamètre au sulfate de cuivre, muni d'électrodes de cuivre, et une boussole des tangentes, pour laquelle le coefficient de réduction* $\frac{R}{2n\pi} = \frac{1}{G} = 0,233$; *on observe une déviation moyenne de* 33°33′ *et il se dépose, en une heure,* $0^{gr},355$ *de cuivre sur la cathode; déduire de cette expérience l'intensité horizontale* H *du magnétisme terrestre au lieu de l'expérience.*

L'intensité du courant est

$$I = \frac{0,355}{1,190} = 0,233 H \tang \alpha.$$

On en déduit

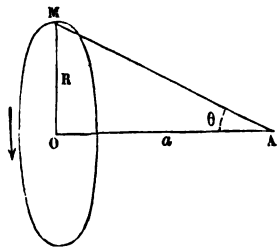
$$H = 0,188 \text{ C.G.S.}$$

C'est par ce procédé que M. Witz a étudié les variations du champ terrestre dans les diverses salles d'un bâtiment à charpentes de fer; il a trouvé, en certains cas, des valeurs de H égales à 0,114, à Lille, alors que le champ a, en cette ville, une intensité égale à 0,189 : la valeur de H varie du reste d'une salle à l'autre d'un même édifice. Il résulte de ce fait que l'étalonnage des galvanomètres, dans lesquels intervient H, doit être effectué au lieu de leur emploi et dans la salle même où ils seront mis en service.

2. *Un courant circulaire mobile autour d'un axe vertical s'est orienté sous l'action de la Terre, en un lieu où l'intensité horizontale* H *est égale à* 0,192; *le rayon du circuit est de* 1^m;

l'intensité du courant égale 1 *ampère. On propose de calculer l'intensité* H′ *du champ au centre même du circuit circulaire* (*fig.* 36).

Fig. 36.



Les flux de force se sont superposés dans l'orientation du courant; leurs intensités s'ajoutent donc au centre.

Quelle est la force exercée au centre du cercle sur l'unité de pôle?

Cherchons le potentiel en un point A, situé sur l'axe du cercle OM (*fig.* 36).

$$V = I\omega + C, \tag{28}$$

$$\omega = 2\pi(1 - \cos\theta) = 2\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right),$$

$$V = 2\pi I\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right) + C,$$

$$H' = -\frac{dV}{da} = 2I\frac{\pi R^2}{(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2IS}{(a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Au centre O,

$$H' = \frac{2\pi I}{R} = \frac{2\pi \times 0,1}{100} = 0,0063 \text{ C.G.S.}$$

Mais les intensités H′ et H s'ajoutent.

L'intensité totale du champ en O est par conséquent égale à $0,192 + 0,0063 = 0,1983$ unités C.G.S.

3. *Une bobine circulaire, formée de* $n = 100$ *spires de* 10^{cm}

de rayon, longue de 20^{cm}, *est traversée par un courant de* 5 *ampères : calculer l'intensité du champ magnétique à l'extrémité de son axe.*

Cette bobine équivaut à un aimant solénoïdal de même forme et l'on peut remplacer chaque spire par un feuillet : l'action du système sur un point extérieur au cylindre se réduit à celle de deux couches égales et de signes contraires, répandues uniformément sur les bases, dont la densité superficielle serait $\sigma = n_1 I$, n_1 étant le nombre de tours par unité de longueur : $n_1 = \frac{n}{l}$.

Mais le flux a pour valeur

$$(3) \qquad \varphi = \int H\,dS = \int S\sigma\,d\omega,$$

d'où

$$H = \sigma(\omega - \omega');$$

ω et ω' sont les angles solides sous lesquels on voit, du point considéré, les cercles extrêmes du solénoïde; dans le cas proposé,

$$\omega = 2\pi \qquad \text{et} \qquad \omega' = 2\pi\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}}\right).$$

Nous trouvons donc

$$H = n_1 I 2\pi \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}} = 5 \times 0{,}5 \times 2\pi \frac{20}{\sqrt{500}},$$

en tenant compte de ce que 5 ampères valent 0,5 unité d'intensité; tous calculs faits, nous trouvons

$$H = 14 \text{ C.G.S.}$$

4. *Quelle eût été l'intensité du champ au milieu de l'axe de la bobine du précédent exercice?*

Posons $H = \sigma(\omega - \omega')$, comme ci-dessus.

Or soit ω_1 l'angle solide sous lequel on voit les bases quand

on est placé au centre; l'angle ω' sera égal à $4\pi - \omega_1$; d'où

$$\begin{aligned}
H &= \sigma(4\pi - 2\omega_1) \\
&= \sigma\left[4\pi - 4\pi\left(1 - \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + R^2}}\right)\right] \\
&= 4\pi\sigma \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4R^2}} \\
&= 4\pi n_1 I \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4R^2}} \\
&= 4\pi \times 5 \times 0{,}5 \times \frac{20}{\sqrt{400 + 400}} \\
&= 22 \text{ C.G.S.}
\end{aligned}$$

5. *On introduit, dans un champ magnétique uniforme d'intensité* H, *un conducteur rectiligne de longueur* $l = 2^{cm}$, *traversé par un courant de* 10 *ampères, et on le dispose dans une direction perpendiculaire à celle des lignes de force du champ; on constate que ce conducteur est soumis à une force* f *de* 180 *dynes. On demande de déterminer l'intensité du champ considéré.*

Le conducteur est soumis à l'action du champ magnétique terrestre, en même temps qu'à celle du champ qu'on se propose d'étudier. La force exercée est donnée par la relation

$$f = HIl. \tag{32}$$

Or, quelle que soit la position du fil conducteur dans le champ terrestre, on peut considérer cette action comme négligeable; en effet, en prenant l'intensité totale de ce champ égale à 0,465, on trouverait que la force supportée de ce chef par le courant serait égale à

$$0{,}465 \times 1 \times 2 = 0{,}930 \text{ dyne.}$$

C'est $\frac{1}{180}$ de l'effort mesuré. N'en tenons donc pas compte, et posons

$$H = \frac{f}{Il} = \frac{180}{1 \times 2} = 90 \text{ C.G.S.}$$

à $\frac{1}{2}$ unité près.

On trouve sans difficulté la direction perpendiculaire à celle des lignes de force, attendu que, dans cette direction, l'action doit être maximum.

6. *Calculer l'intensité moyenne du champ à l'intérieur d'une bobine annulaire, en forme de tore, de rayon* R, *a étant le rayon de la section circulaire et* n_1 *le nombre des spires comprises entre deux plans méridiens, qui font entre eux un angle égal à l'unité; le courant a une intensité* I.

En tout point extérieur au tore, l'intensité du champ est nulle; mais il y a lieu de considérer l'intensité moyenne du champ à l'intérieur.

Les lignes de force y sont parallèles à l'axe du tore.

Pour calculer l'intensité du champ, remarquons que les solénoïdes compris entre deux plans méridiens, dont l'écartement est égal à l'unité, ont une intensité d'aimantation

$$\mathfrak{I} = \frac{n_1 \mathrm{I}}{x},$$

si nous mesurons leur espacement moyen sur une circonférence de rayon x quelconque.

Pour une section S, le flux aura pour valeur

(3 et 3o) $$4\pi n_1 \mathrm{I} \int \frac{d\mathrm{S}}{x}.$$

Calculons $\int \frac{d\mathrm{S}}{x}$ entre les limites $\mathrm{R} - a$ et $\mathrm{R} + a$, il vient

$$\int_{\mathrm{R}-a}^{\mathrm{R}+a} \frac{d\mathrm{S}}{x} = \int_{\mathrm{R}-a}^{\mathrm{R}+a} \frac{y\,dx}{x} = \int_{\mathrm{R}-a}^{\mathrm{R}+a} \frac{\sqrt{a^2 - (\mathrm{R} - x)^2}}{x}\,dx.$$

L'intégrale proposée, mise sous la forme

$$\int \frac{a^2 - (\mathrm{R} - x)^2}{x\sqrt{a^2 - (\mathrm{R} - x)^2}}\,dx,$$

peut être décomposée en trois autres,

$$(a^2 - R^2)\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-(R-x)^2}}$$
$$+\int \frac{(R-x)\,dx}{\sqrt{a^2-(R-x)^2}}$$
$$+\int \frac{R\,dx}{\sqrt{a^2-(R-x)^2}}.$$

La première intégrale donne

$$\sqrt{R^2-a^2}\left[\arccos\frac{(R+a)(R-a)}{ax} - \frac{R}{a}\right]_{R-a}^{R+a} = -\pi\sqrt{R^2-a^2}.$$

La seconde conduit à

$$\left[\sqrt{a^2-(R-x)^2}\right]_{R-a}^{R+a} = 0.$$

La troisième est égale à

$$R\left(\arccos\frac{R-x}{a}\right)_{R-a}^{R+a} = \pi R.$$

Le flux total a donc pour valeur

$$\varphi = 4\pi n_1 I.\pi\left(R-\sqrt{R^2-a^2}\right)$$
$$= 4\pi^2 n_1 I\left(R-\sqrt{R^2-a^2}\right).$$

L'intensité moyenne du champ est donc

$$H_m = \frac{4\pi n_1 I}{a^2}\left(R-\sqrt{R^2-a^2}\right).$$

7. *Quelle eût été l'intensité moyenne de ce champ, si le fil avait été enroulé sur un tore de fer doux formant noyau?*

Il aurait fallu multiplier la valeur trouvée par μ, coefficient de perméabilité du fer doux employé.

8. *Quelle est l'intensité moyenne du champ fourni par une*

bobine annulaire de révolution, dont la section serait rectangulaire?

La question est ramenée, comme ci-dessus, à l'intégration de $\int_R^{R+b} \frac{dS}{x}$, b étant la base du rectangle parallèle au rayon du tore.

Or nous aurons, en désignant par a la longueur de l'autre côté,

$$\int \frac{dS}{x} = \int \frac{a\,dx}{x}$$

et

$$\int_R^{R+b} \frac{dS}{x} = a \log' \frac{R+b}{R} = a \log'\left(1 + \frac{b}{R}\right)$$
$$= a\left(\frac{b}{R} - \frac{b^2}{2}\frac{1}{R^2} + \frac{b^3}{3}\frac{1}{R^3} - \ldots\right)$$
$$= \frac{ab}{R}.$$

Donc

$$\varphi = 4\pi n_1 I \frac{ab}{R}.$$

L'intensité moyenne du champ sera, par suite,

$$H_m = \frac{4\pi n_1 I}{R}.$$

Comme n_1 est le nombre de spires comprises dans l'unité d'angle, on peut écrire que

$$N = 2\pi n_1,$$

N étant le nombre total de spires; on a dès lors

$$H_m = \frac{2IN}{R}.$$

9. *Une petite bobine est suspendue par un double fil dans un champ dont on se propose de mesurer l'intensité; or, lorsqu'un courant de* 0,05 *ampère circule dans la bobine, le plan vertical des spires, qui était d'abord parallèle aux lignes de force du champ, dévie d'un angle* δ *égal à* 48°. *Calculer* H,

sachant que la constante de la suspension bifilaire est égale à 600 *et que la surface des spires est de* 100^{cm^2}.

L'équation d'équilibre est

$$HIS \cos\delta = C \sin\delta;$$

elle donne

$$H = \frac{C}{IS} \operatorname{tang}\delta.$$

Cette méthode de détermination de H est due à M. Stenger, de Dresde.

Tous calculs faits, nous trouvons

$$H = 120 \operatorname{tang}\delta = 133,2 \text{ C.G.S.}$$

10. *Une spirale de bismuth, de résistance* R_0, *prend une résistance* $R = 1,2\, R_0$ *quand on la porte dans un champ, la spirale étant placée normalement aux lignes de force* (¹). *Calculer l'intensité* H *de ce champ par la formule de M. Leduc*

$$z^2 + \beta z - \alpha H^2 o,$$

dans laquelle z *est l'augmentation éprouvée par l'unité de résistance, évaluée en millièmes,* β *un paramètre égal à* 244 *et* α *un autre paramètre égal à* 484.

Résolvons pour H l'équation ci-dessus et faisons $z = 200$, puisque ce symbole représente les millièmes d'augmentation par unité; il vient

$$H = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{z(z+\beta)} = 6596 \text{ C.G.S.}$$

11. *M. Knut Angström détermine l'intensité des champs à l'aide d'une balance, par laquelle on mesure l'action exercée par le champ sur une bobine de surface* S, *dirigée perpendiculairement aux lignes de force et traversée par un courant d'intensité* I. *Pour une surface* $S = 242^{cm^2}$, *on trouve une force* F *de* $0^{gr},08$. *Quant à l'intensité* I, *elle se détermine par l'électromètre de Lippmann, en observant la*

(¹) Quand la spirale est normale aux lignes de force, sa résistance est maximum.

différence de potentiel e établie par le courant entre les bornes d'une résistance de 25 *ohms : on trouve* 0,232 *volt. Quelle est l'intensité* H *du champ?*

On a évidemment

$$F = HIS.$$

Mais F doit être évalué en dynes; donc

$$0,08 \times 981 = H \times \frac{0,232}{25} \times 242,$$

$$H = 350 \text{ C.G.S.}$$

12. *Une cuve, de* $0^{cm},47$ *de largeur intérieure, remplie de sulfure de carbone, à la température de* $16^{\circ},5$, *dévie le plan de polarisation de* $4^{\circ}45'$, *quand on la place entre les pôles d'un électro, le rayon de lumière polarisée se propageant suivant la direction des lignes de force. En déduire l'intensité du champ interpolaire.*

Le pouvoir rotatoire magnétique du sulfure de carbone varie avec la température; s'il est égal à 1° à 0°, il sera à t°

$$1 - 0,00104t - 0,000014t^2 = A;$$

pour $t = 16^{\circ},5$, $A = 0,9789$.

Nous aurons donc, dans l'unité de champ, une rotation de

$$0,9789 \times 0,04341 \times 0,47 = 0',02.$$

L'intensité du champ sera de

$$\frac{285}{0,02} = 14250 \text{ C.G.S.}$$

C'est par ce procédé que l'auteur de ce Livre a mesuré les champs dont il s'est servi dans ses expériences sur les spectres des gaz raréfiés.

13. *Une petite bobine aplatie, mise en circuit avec un galvanomètre balistique, fait une demi-révolution autour d'un axe normal à la direction du champ; il se produit alors au*

balistique une élongation δ; *en déduire l'intensité* H *de ce champ.*

La quantité d'électricité q induite par la variation du flux est $\frac{2HS}{R}$, S étant la surface totale de la bobine et R la résistance totale du circuit; nous aurons donc

$$q = \frac{2HS}{R} = \frac{I}{\tang \alpha} \frac{t}{\pi} \sin \delta = B \sin \delta.$$

On calculera aisément H, si le balistique peut être disposé dans un local éloigné et, par suite, soustrait à l'action du champ; c'est le seul inconvénient de cette méthode, dite *de l'inclinomètre de Weber.*

$$H = \frac{RB \sin \delta}{2S}.$$

CHAPITRE XVI.

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION.

1. *Une barre métallique de* 2^m *de longueur tombe parallèlement à elle-même sous l'action de la pesanteur; mais un frein régularise son mouvement et lui donne une vitesse uniforme de* 10^m *à la seconde. Quelle est en volts la différence de potentiel entre les extrémités de la barre?*

Le flux coupé est

$$(38)\quad \begin{cases} \mathrm{H}lv = 0,190 \times 200 \times 1000 \\ \quad = 38000 \text{ U.E.M.} \\ \quad = 0,00038 \text{ volt.} \end{cases}$$

2. *Un conducteur de longueur* $l = 10^{cm}$ *coupe, sous un angle* α *de* $45°$, *les lignes de force d'un champ magnétique d'intensité* $\mathrm{H} = 1000$ *unités, avec une vitesse de* 1^m *à la seconde, la direction du mouvement étant celle de la réaction du champ; calculer la force électromotrice du courant induit.*

$$(39)\quad \begin{cases} \mathrm{E} = \mathrm{H}lv \sin\alpha \\ \quad = 1000 \times 10 \times 100 \times \sin 45° \\ \quad = 707107 \text{ U.E.M.} \\ \quad = 0,0071 \text{ volt.} \end{cases}$$

3. *Faraday a proposé de plonger dans l'eau, sur les deux rives d'un fleuve coulant de l'est à l'ouest, d'une largeur* $l = 2500^{cm}$, *deux électrodes reliées par un conducteur métallique; soient* $v = 100^{cm}$ *la vitesse du courant, produit par une pente au* $\frac{1}{1000}$ *et* $\mathrm{R} = 1$ *ohm la résistance du fil conjonctif.*

Quelle sera l'intensité I *du courant induit dans ce fil, sachant qu'au lieu considéré l'inclinaison est égale à* 65°15′6″ *et que l'intensité horizontale* H *du magnétisme terrestre a une valeur de* 0,194 *unités?*

Une pente de $\frac{1}{1000}$ équivaut à un angle δ de 3′26″ sur l'horizon et l'intensité efficace du magnétisme terrestre sera

$$H' = H \operatorname{tang} i \cos\delta = 0,421 \text{ C.G.S.}$$

Les tranches de liquide se déplacent perpendiculairement aux lignes de force du champ et $\sin\alpha = 1$.

La quantité q d'électricité induite est égale à

$$(37) \qquad \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R} = \frac{H' l v}{R};$$

cette quantité est, d'autre part, égale à It, dans le temps t, de sorte que l'on peut écrire

$$It = \frac{H'}{R} l v t$$

ou

$$\begin{aligned} I &= \frac{H'}{R} l v \\ &= \frac{0,421}{10^9} \times 2500 \times 100 \\ &= \frac{105250}{10^9} = 1,05 \times 10^{-4} \text{ U.E.M.} \\ &= 1,05 \times 10^{-3} \text{ ampère} \\ &= 1,05 \text{ milliampère.} \end{aligned}$$

La force électromotrice qui produit ce courant est égale à

$$105250 \text{ U.E.M.} = 1,05 . 10^{-3} \text{ volt.}$$

4. *Un wagon d'express roule, à une vitesse* v *de* 90^{km} *à l'heure, sur une voie ferrée horizontale dirigée de l'est à l'ouest, dont les rails sont écartés de* $1^m,51$ *d'axe en axe; l'intensité* V *verticale du magnétisme terrestre est égale à* 0,425. *On demande de calculer la force électromotrice engendrée par la progression d'un essieu du wagon.*

L'essieu coupe normalement les lignes de force du magnétisme terrestre; la force électromotrice développée est donc, en appelant d l'écartement des rails,

$$E = V v d.$$

La vitesse v est égale à $\frac{9000000}{3600} = 2500^{cm}$ à la seconde; il vient, par conséquent,

$$\begin{aligned} E &= 0,425 \times 2500 \times 151 \\ &= 160437 \text{ U.E.M.} \\ &= 0,1604 \times 10^{-2} \text{ volt.} \end{aligned}$$

Le courant produit pourrait être recueilli dans un conducteur reliant les rails, mais il serait très faible, alors même que la résistance du circuit serait minime.

5. *On fait glisser le long d'un aimant cylindrique un anneau circulaire l'enserrant étroitement; on part du milieu de l'aimant et l'on s'arrête à* 1^{cm} *du pôle. Un balistique mesure la quantité d'électricité induite* q; *en déduire la valeur de l'intensité moyenne d'aimantation.*

La décharge mesure le flux coupé dans le déplacement de l'anneau; il faut diviser ce flux par la surface décrite par l'anneau dans son mouvement :

(2, 3 et 37) $$q = \frac{\varphi}{SR} = \frac{4\pi\mathfrak{I}S}{SR} = \frac{4\pi\mathfrak{I}}{R}.$$

6. *Une aiguille aimantée de galvanomètre, de moment* $\mathfrak{M} = 200$ *unités, oscille au-dessus d'un cadre de cuivre rouge qui amortit ses oscillations; quelle est la quantité de chaleur produite pour une oscillation de* 360°?

$$\begin{aligned} w &= \frac{\mathfrak{M}H}{J} = \frac{200 \times 0,190}{4,17 \times 10^{10}} = 9,1 \times 10^{-10} \text{ calories.} \\ &= 9,1 \times 10^{-7} \text{ calories-gramme.} \end{aligned}$$

On n'observe donc jamais de dégagement sensible de chaleur, car cette quantité est excessivement faible.

7. *Recherche du coefficient d'induction mutuelle pour une bobine de Ruhmkorff, formée d'une couche unique de gros fil inducteur, comprenant n tours par unité de longueur, et d'une bobine concentrique de fil fin induit, contenant* N *tours par unité de longueur;* S *est la section du solénoïde simple inducteur, r son rayon et* R *le rayon extérieur de la bobine induite.*

Le coefficient d'induction mutuelle ne dépend que de la forme et de la position des deux circuits; c'est le flux de force embrassé par la bobine induite pour un courant égal à l'unité dans l'inducteur. Ce flux de force a pour valeur

$$4\pi n S;$$

il traverse N fois la surface de l'induit; on sait donc que le coefficient d'induction serait égal à

$$4\pi n N S = 4\pi^2 n N r^2 \tag{46}$$

pour une seule couche d'induit; pour des couches plus nombreuses, il faut chercher combien de fils coupent le plan méridien par unité de section, dans la bobine extérieure induite : comme il y en a N par unité de longueur et que la répartition des spires est uniforme, nous pouvons en évaluer le nombre à N^2 par centimètre carré. Pour une épaisseur dr, nous aurons donc

$$4\pi^2 n N^2 r^2 dr.$$

Entre les rayons R et r, on écrira

$$4\pi^2 n N^2 \int_r^R r^2 dr;$$

il vient finalement

$$L_m = \tfrac{4}{3}\pi^2 N^2 n (R^3 - r^3).$$

Nous avons fait abstraction, dans ce calcul, de l'effet des extrémités, qui complique beaucoup les résultats.

8. *Calcul du coefficient de self-induction d'une bobine de rayons r_1 et* R, *comptant* N *tours de fil par unité de longueur.*

Dans le problème précédent, nous avons trouvé le coefficient d'induction mutuelle L_m d'un solénoïde simple sur une bobine qui l'enveloppe; pour déterminer le coefficient d'auto-induction L_s, commençons par calculer le coefficient d'induction mutuelle entre deux bobines, l'une de rayons R et r, l'autre formée d'une bobine de rayons r_1 et ρ par exemple; reprenons donc le calcul ci-dessus en remplaçant le solénoïde simple de l'exercice précédent par une bobine de rayons r_1 et ρ. Il faudra remplacer n par $n \times n(r_1 - \rho)$, nombre total des spires de la bobine nouvelle : il vient, par suite,

$$\begin{aligned} L_m &= \tfrac{1}{3}\pi^2 N^2 (R^3 - r^3) n^2 (r_1 - \rho) \\ &= \tfrac{1}{3}\pi^2 N^2 n^2 (R^3 - r^3)(r_1 - \rho). \end{aligned}$$

Mais le coefficient de self-induction est la limite vers laquelle tend le coefficient d'induction mutuelle de deux circuits identiques, parcourus par un courant de même sens et de même intensité, quand ils se confondent.

Faisons donc $n = N$ et $R = r_1$, $r = \rho$, nous aurons

$$L_s = \tfrac{1}{3}\pi^2 N^4 (R^3 - r^3)(R - r).$$

9. *On ferme un circuit, composé d'une bobine de* 6 *ohms de résistance, dont le coefficient de self-induction est égal à* $0{,}002 \times 10^{9\,\text{cm}}$; *la force électromotrice est de* 10 *volts. Quelle sera l'intensité du courant au bout d'un millième de seconde?*

L'intensité normale I_0 serait de $\frac{10}{6} = 1{,}667$ ampère.

Au bout d'une seconde, nous aurons

$$(42) \qquad \left\{ \begin{aligned} I &= 1{,}667\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L_s}}\right) \\ &= 1{,}667\left(1 - e^{-\frac{6 \times 10^{-3}}{0{,}002 \times 10^{9} \times 1000}}\right) \\ &= 1{,}667(1 - 0{,}0498) \\ &= 1{,}583 \text{ ampère.} \end{aligned} \right.$$

10. *Quelle est la quantité d'électricité de l'extra-courant de fermeture, dans le cas proposé ci-dessus?*

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} Q &= \frac{EL_s}{R^2} \\ &= \frac{10 \times 10^8 \times 0{,}002 \times 10^9}{36 \times 10^{18}} \\ &= 0{,}00006 \text{ coulomb} \\ &= 60 \text{ micro-coulombs.} \end{aligned}\right.$$

11. *L'établissement d'un courant dans une bobine absorbe une certaine quantité d'énergie et cet effet ne permet au courant d'atteindre son intensité normale qu'au bout d'un temps infini. On propose de calculer le temps nécessaire pour que dans une bobine, pour laquelle* $R = 2$ *ohms et* $L = 0{,}095 \times 10^{9\,cm}$, *un courant de* 5 *ampères ne diffère que de* $\frac{1}{100}$ *de sa valeur normale; on déterminera de plus la somme d'énergie emmagasinée à l'état potentiel.*

Nous avons vu que l'intensité du courant est donnée par l'équation

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L_s}}\right);$$

au bout du temps t, le courant a donc pris la valeur $\frac{E}{R}e^{-\frac{Rt}{L_s}}$ et, la différence entre son intensité vraie et son intensité normale devant être moindre que $\frac{1}{100}$, on aura

$$e^{-\frac{Rt}{L_s}} = \frac{1}{100}$$

d'où

$$t = \frac{L_s}{R}\log' 100 = \frac{0{,}095 \times 10^9}{2 \times 10^9} \times 4{,}605 = 0^s{,}22.$$

Quant à l'énergie emmagasinée, elle est

$$\tfrac{1}{2}L_s I^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}095 \times 10^9 \times 5^{-2} \times 10^{-2} = 1188 \times 10^4 \text{ ergs.}$$

12. *Une bobine* A *étant placée dans le voisinage d'une bobine* B, *on cherche à évaluer leur coefficient d'induction*

mutuelle L_m. *A cet effet, on constate d'abord que, si l'on interrompt brusquement en* A *un courant d'intensité* I, *un galvanomètre balistique placé dans le circuit de* B, *ayant une résistance* R', *subit une impulsion* α. *Mais qu'on enlève* B *et qu'on introduise dans le circuit de* A *le même galvanomètre avec un condensateur de capacité* C; *en interrompant le circuit principal, dont le courant a une intensité* I_1, *le galvanomètre subit une impulsion déterminée due à la décharge du condensateur; cette impulsion devient de nouveau égale à* α *pour une résistance* R_1 : *quelle sera la valeur de* L_m?

La première expérience nous donne pour la quantité d'électricité induite q

$$q = k\alpha = L_m \frac{I}{R'}.$$

Dans le second essai, l'impulsion étant rendue égale à α, il passe la même quantité d'électricité q

$$q = k\alpha = CI_1R_1.$$

Il vient donc

$$L_m = C\frac{I_1R_1R'}{I}.$$

Cette méthode a été indiquée et appliquée par M. Foster; elle simplifie beaucoup la détermination de L_m.

13. *On connaît le coefficient* L_m *de mutuelle induction de deux bobines* A *et* B, *et l'on cherche le coefficient* L'_m *de deux bobines* A' *et* B'. *A cet effet, on relie* A *et* B *en série avec une pile et une clef de contact, tandis que* A' *et* B' *sont reliées parallèlement avec un galvanomètre, de sorte que les courants induits se neutralisent. L'interruption du courant donne néanmoins une déviation de l'aiguille : on la réduit à zéro par une résistance additionnelle* R. *On demande la valeur de* L'_m *en fonction de* L_m.

Appelons ρ et ρ' les résistances des bobines B et B'; on aura

$$\frac{L_m}{\rho} = \frac{L'_m}{\rho' + R};$$

d'où

$$L'_m = L_m \frac{\rho' + R}{\rho}.$$

Cette méthode de comparaison est due à Maxwell.

14. *Un disque de Faraday tourne autour de son axe d'un mouvement uniforme; la durée d'une révolution complète est* T, *et nous représenterons sa surface par* S. *Le courant produit par cette rotation est lancé dans une bobine dont l'axe coïncide avec l'axe du disque et dont la résistance est* R. *Déduire de cette expérience la valeur du coefficient d'induction mutuelle de la bobine avec la circonférence du disque.*

Appelons ω la vitesse angulaire du disque et I l'intensité du courant produit dans un champ H; on peut écrire, r étant le rayon du disque,

$$I = \frac{1}{2}\frac{\omega r^2 H}{R} = \frac{SH}{RT},$$

car $S = \pi r^2$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$; on a, par suite,

$$I = \frac{L_m I}{RT},$$

$$L_m = RT.$$

Il n'y a qu'à mesurer la résistance R et la durée T de la révolution du disque : c'est par une méthode analogue que M. Lorenz a déterminé R en fonction de L_m, cette dernière grandeur étant alors obtenue par le calcul.

15. *Une pile constante, de force électromotrice* E *et de résistance intérieure* r, *lance un courant dans les deux branches symétriques d'un galvanomètre différentiel, comprenant dans son double circuit, d'une part, une bobine dont la self-induction est* L_s, *de l'autre, un fil rectiligne de même résistance* R *que la bobine. La réduction au zéro étant obtenue par un ajustement approprié, on rompt le circuit principal, et le courant induit qui parcourt les deux branches, de manière à doubler son action électromagnétique, provoque une*

impulsion balistique δ; *la constante balistique* k *de l'instrument est du reste connue. Calculer, d'après cela, le coefficient* L_s *de self-induction de la bobine.*

L'intensité du courant dérivé dans chaque branche du galvanomètre est $\frac{ER}{R^2+2Rr} = \frac{E}{R+2r}$; la quantité d'électricité qui correspond à l'extra-courant de rupture est donnée, par suite, par l'intégrale

$$q = \frac{E}{R+2r}\int_0^\alpha e^{-\frac{2Rt}{L_s dt}} = \frac{EL_s}{(R+2r)2R}.$$

L'étalonnage du galvanomètre balistique nous fournit une seconde expression de q

$$q = k\delta.$$

Nous en tirons $L_s = \frac{k\delta(R+2r)2R}{E}$.

16. *Une des branches d'un pont de Wheatstone renferme une bobine dont on veut mesurer le coefficient de self-induction. L'équilibre étant d'abord obtenu en courant permanent, on observe néanmoins une élongation* δ *au galvanomètre au moment de la rupture du courant; mais on constate qu'on obtiendrait la même élongation* δ *en courant permanent par l'addition d'une petite résistance additionnelle* r *dans la branche qui contient la bobine. Quelle est la valeur de* L_s *pour la bobine étudiée?*

La première élongation δ, constatée en régime variable, est due à la force électromotrice totale L_sI développée par la self-induction de la bobine.

Or la résistance r provoque une chute de potentiel rI', I' étant la nouvelle intensité du courant dans la même branche.

L'effet étant le même, il semble qu'on puisse écrire

$$L_sI = rI'.$$

Mais la sensibilité du galvanomètre n'est point la même

pour le courant permanent et pour le passage instantané de la quantité d'électricité correspondant au second cas.

Les élongations égales δ ne correspondent pas à deux états identiques. Pour le courant permanent, le coefficient du galvanomètre est k; pour une déviation balistique, c'est k'.

Nous écrirons donc

$$\frac{L_s I}{r I'} = \frac{k\delta}{k'\delta} = \frac{k}{k'}.$$

Admettons avec Lord Rayleigh, qui a institué cette méthode, que I' soit sensiblement égal à I, vu la petitesse de r.

Il viendra

$$\frac{L_s}{r} = \frac{k}{k'}$$

et

$$L_s = r\frac{k}{k'}.$$

Transformée par M. Ledeboër et MM. Ayrton et Perry, cette méthode est devenue très précise, tandis que le procédé que nous venons de décrire n'est qu'approximatif; mais il est suffisant dans la pratique.

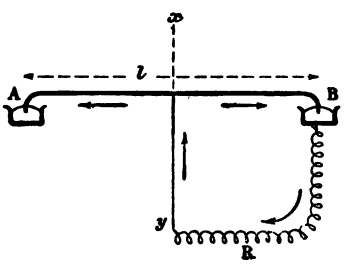
Il faut évidemment que toutes les résistances du pont soient dénuées de self-induction.

CHAPITRE XVII.

GÉNÉRATEURS MÉCANIQUES D'ÉLECTRICITÉ.

1. *Un conducteur rectiligne* AB (*fig.* 37) *de longueur* $l = 50^{cm}$ *est mobile autour de son axe vertical* xy, *et il tourne à la vitesse de* 50 *tours à la seconde; ses extrémités plongent dans un bain de mercure qui est relié à l'axe par un fil conjonctif de résistance* R. *On demande de calculer la force électromotrice développée par cette machine magnétodynamique, en un lieu où l'intensité verticale* V *du magnétisme terrestre est égale à* 0,425.

Fig. 37.



La force efficace du champ est sa composante verticale : le flux de force coupé par chaque rayon $\frac{l}{2}$ dans chaque révolution est $\pi \frac{l^2}{4}$ V; comme il y a deux bras, nous aurons pour n tours $n\pi \frac{l^2}{2}$ V. Soit I l'intensité du courant développé; elle sera $\frac{I}{2}$ dans chaque branche et le travail nécessaire pour entretenir

le mouvement s'obtiendra en multipliant $n\pi \frac{l^2}{2} V$ par $\frac{I}{2}$, ce qui donne

$$n\pi \frac{l^2}{4} VI.$$

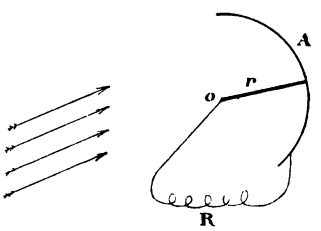
La force électromotrice est donc $n\pi \frac{l^2}{4} V$.

$$\begin{aligned} E &= 50 \times \pi \times \frac{2500}{4} \times 0,425 \\ &= 41431 \text{ U.E.M.} \\ &= 0,41 \times 10^{-3} \text{ volts.} \end{aligned}$$

Il faudrait 2500 machines de ce genre pour réaliser la force électromotrice d'un daniell, ou bien il serait nécessaire de porter la vitesse à $n = \frac{4 \times 10^8}{\pi l^2 V} = 130000$ tours, pour qu'une seule machine valût un daniell, ou bien encore l'on devrait donner à l une valeur de $\sqrt{\frac{4 \times 10^8}{n\pi V}} = 25^m$ environ.

2. *Un conducteur* oA (*fig.* 38) *tourne autour de o comme centre, en décrivant un plan vertical; sa vitesse angulaire* ω *est égale à* 12^{cm}; *le rayon* $r = oA$ *est de* 1^m; *l'intensité horizontale du magnétisme terrestre, au lieu de l'expérience, est égale à* 0,205 C.G.S. *Quelle sera l'intensité du courant produit dans une résistance totale de* 0,8 *ohm?*

Fig. 38.



Le flux coupé dans l'unité de temps est égal à

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\omega r^2 \mathrm{H}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{\omega r^2 \mathrm{H}}{2\mathrm{R}} \\ &= \frac{12 \times \overline{100}^2 \times 0{,}205}{2 \times 0{,}8 \times 10^9} = 0{,}154 \times 10^{-4}\ \text{U.E.M.} \\ &= 0{,}154 \text{ milliampère.} \end{aligned}$$

Ces deux problèmes témoignent de l'impossibilité d'utiliser le champ terrestre comme inducteur.

3. *Un disque métallique, de* $10^{cm},5$ *de rayon, tourne d'un mouvement uniforme dans un champ de* 800 *unités* C.G.S.; *il fait* 120 *tours à la seconde; son axe est parallèle au champ. Quelle est la différence de potentiel qui s'établit entre le centre et la périphérie du disque?*

$$\begin{aligned} \mathrm{E} = \mathrm{HS}n &= 800 \times \pi \times \overline{10{,}5}^2 \times 120 \\ &= 3325 \times 10^4 \\ &= 0{,}33 \text{ volt.} \end{aligned}$$

Les trois problèmes précédents sont relatifs à des dispositions qui donnent directement des courants continus.

Le disque ci-dessus est le type des machines unipolaires.

4. *Un circuit rectangulaire* (*fig.* 39) *tourne avec une vitesse de* $n = 400$ *tours à la seconde dans un champ uniforme d'intensité* H, *dont la direction est perpendiculaire à l'axe* xy *et horizontale. Le rayon* R *de rotation est de* 50^{cm}; $l = 150^{cm}$; *enfin* $\mathrm{H} = 120$ *unités* C.G.S. *Quelle est la différence de potentiel entre les deux balais a et b?*

Les côtés AB et CD du rectangle sont seuls efficaces, parce que seuls ils coupent les lignes de force; cherchons d'abord la vitesse v de ces côtés, normalement à la direction de H, et rapportons la position du cadre à la verticale Oz; soit α l'angle du plan ABCD avec Oz.

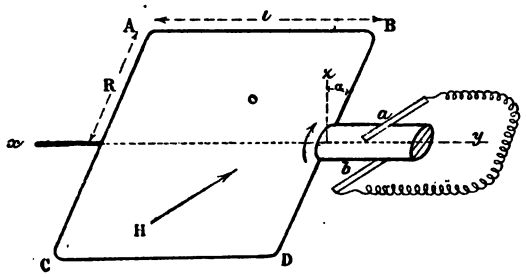
$$v = 2\pi \mathrm{R} n \sin\alpha.$$

Or les forces électromotrices induites dans AB et CD s'ajoutent; nous aurons donc

$$E = 2Hlv = 4\pi R l n H \sin\alpha.$$

La force électromotrice est nulle pour $\alpha = 0$; elle croît jusqu'à son maximum $4\pi R l n H$, qu'elle atteint lorsque le cadre est parallèle aux lignes de force; elle décroît ensuite

Fig. 39.

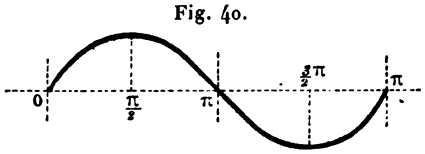


jusqu'à zéro, de $\alpha = 180°$ à $0°$; puis elle change de sens pour redevenir enfin nulle quand $\alpha = 360°$. En remarquant que la surface S du cadre est égale à $2Rl$ et que n est égal à l'inverse de la période T, on peut écrire

$$E = 2\pi \frac{SH}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

L'épure de la *fig.* 40 permet de suivre ces variations de la force électromotrice : la machine serait évidemment à cou-

Fig. 40.



rants alternatifs, si elle n'était point pourvue d'un commutateur redressant les courants.

La valeur moyenne de la force électromotrice s'obtiendra en intégrant $\int 4\pi R ln \sin\alpha\, d\alpha$ entre les limites o et π, ce qui conduit à $2 \times 4\pi R ln$; d'où

$$E_m = 8\pi R ln H = 4\pi \frac{SH}{T}$$
$$= 90,58 \times 10^8 \text{ U.E.M.} = 90,58 \text{ volts.}$$

Si, au lieu d'un seul fil, il y en avait eu N, la force électromotrice eût été N fois plus grande.

L'armature en navette de Siemens se rapproche le plus des conditions théoriques de ce problème.

5. *Un anneau de Pacinotti ou de Gramme est intercalé avec une bobine étalon et un galvanomètre à oscillations lentes, dans un même circuit. La bobine étant couchée à plat sur une table, on la retourne brusquement dans la direction est-ouest et l'on note une déviation δ au galvanomètre : une rotation de 180° de l'anneau produit une déviation δ'. Quelle est la surface équivalente S de l'anneau, σ étant celle de la bobine étalon?*

Les quantités d'électricité induites dans un même champ sont proportionnelles aux surfaces S et aux sinus de la moitié des angles d'impulsion. Toutefois, il y a une remarque à faire relativement aux bobines élémentaires dont l'anneau est composé; elles tournent toutes de 180°, mais en partant de positions diverses, et l'effet de leur rotation est proportionnel à la valeur moyenne du sinus entre 0° et 180°. De plus, comme il y a deux séries de bobines entre les balais, le courant n'est que la moitié de ce qu'il serait si toutes les bobines se succédaient en série. La première considération nous conduit, par conséquent, à diviser l'effet par $\frac{2}{\pi}$, valeur moyenne du sinus de 0° à 180°, alors que la seconde nous le fera multiplier par 2.

Il vient donc

$$\frac{S}{\pi\delta'} = \frac{\sigma}{\delta},$$

$$S = \pi\sigma \frac{\delta'}{\delta}.$$

6. *L'angle de calage des balais d'une machine dynamo est égal à α; quel est le rapport des champs magnétiques dus aux électro-inducteurs et au courant de l'armature?*

Les électro-inducteurs produisent un champ uniforme (on peut l'admettre) dont les lignes de force sont horizontales et les pôles de l'anneau sont situés dans un plan horizontal; les courants induits tendent, au contraire, à placer les pôles sur la verticale de l'axe. Le résultat de cette double action est de tordre les lignes de force dans l'entrefer et de produire une aimantation oblique par rapport à la ligne neutre. Les balais devant opérer la commutation au moment où le flux est maximum sont placés suivant la direction de la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent ces deux forces magnétisantes et le rapport des champs est égal à $\sin\alpha$.

Ce fait a été démontré par Sylvanus Thompson.

7. *La valeur moyenne du champ magnétique d'une machine de Gramme étant* H_m (*si on la rapporte à la moitié de l'anneau*), $2n$ *étant le nombre de spires de l'anneau,* l *la longueur de cet anneau,* v *la vitesse de la couche moyenne des fils, on demande de calculer la force électromotrice théorique de la machine.*

Les balais collecteurs divisent les bobines en deux groupes qui se déplacent dans le champ; les forces électromotrices induites dans ces deux groupes sont de sens opposés : on a en réalité deux circuits dérivés, reliés en quantité aux balais, et la force électromotrice totale est égale à la somme des actions élémentaires dans une moitié de l'induit. Mais les différentes bobines sont le siège d'actions variables en grandeur. Chaque fil de chaque spire engendre, dans l'une des moitiés de l'anneau, une force électromotrice dE égale à

$$dE = dH\,lv,$$

dH étant l'intensité variable du champ suivant chaque rayon.

Par demi-anneau, nous aurons

$$E = \int_0^n dE = vl\int_0^n dH.$$

Or on peut poser

$$\frac{1}{n}\int_0^n dH = H_m.$$

Il vient donc

$$E = nlvH_m.$$

Pour exprimer E en volts, il faut le diviser par 10^8, si H est exprimé en unités C.G.S.

8. *Un induit bipolaire à anneau (Gramme) a un diamètre extérieur* D; *son noyau, de section rectangulaire, a une longueur l suivant l'axe de rotation et une épaisseur e. L'intensité moyenne du champ dans l'entrefer est* H. *La bobine est formée de* N *fils et l'induit fait n révolutions à la seconde. Quelle est la force électromotrice moyenne de cette machine?*

Considérons un des fils extérieurs de l'induit; sa longueur est l; il parcourt par seconde un chemin $\pi D n$. La force électromotrice induite a, par suite, pour valeur

$$(38) \qquad H l \pi D n.$$

Voilà pour un fil : or il y en a $\frac{N}{2}$ en tension; par suite

$$E = \tfrac{1}{2}\pi D l n N H \text{ en U.E.M.}$$

Au lieu de donner H, on aurait pu fournir la valeur du flux moyen φ dans l'entrefer : dans ce cas, nous aurions raisonné comme il suit.

Le flux se partage en deux parties égales en suivant les deux moitiés de l'induit : une spire, en faisant un tour complet, reçoit donc deux fois un flux $\frac{\varphi}{2}$, et deux fois elle traverse une région où le flux est nul. Nous écrirons par suite

$$E = \frac{4\varphi}{2} n = 2\varphi n \text{ par spire.}$$

Mais il y a $\frac{N}{2}$ spires en tension; donc

$$E = \varphi n N.$$

Comme $\varphi = HS = H \times \frac{1}{2}\pi D l$, nous retrouvons l'expression ci-dessus.

9. *Étudier les conditions pratiques de l'accouplement en batterie de deux dynamos de forces électromotrices* E_1 *et* E_2, *de résistances intérieures* r_1 *et* r_2, *desservant un circuit de résistance* R.

Les deux forces électromotrices étant inégales, il est à craindre que le courant d'une machine ne pénètre dans la machine la plus faible en sens opposé et n'intervertisse ses polarités. On évitera cet inconvénient grave en réglant convenablement la résistance R, ainsi que nous allons le démontrer.

Supposons tour à tour qu'une seule machine soit génératrice, l'autre étant conductrice, et calculons les intensités I_1 et I'_1 des courants qui traversent dans ces deux cas la première machine.

Nous aurons d'abord

$$I_1 = \frac{E_2 R}{R r_1 + R r_2 + r_1 r_2}.$$

Dans le second cas,

$$I'_1 = \frac{E_1 (R + r_2)}{R r_1 + R r_2 + r_1 r_2}.$$

Ces deux courants étant simultanés, le courant ne changera pas de sens tant que l'on aura

$$E_1 (R + r_2) - E_2 R \geqq 0$$

ou

$$\frac{R}{r_2} \geqq \frac{E_1}{E_2 - E_1}.$$

Il n'y aura aucun danger pour les dynamos, tant que R satisfera à cette relation, E_2 étant la force électromotrice la plus grande.

10. *M. Ledeboër a déterminé le coefficient de self-induction d'un anneau d'une machine de Gramme; pour un courant de* 20,4 *ampères, il a trouvé pour* L_s *une valeur de* $0,0152 \times 10^{9\,cm}$.

Quelle est la perte d'énergie correspondante pour une vitesse de 1650 *tours par minute?*

Au moment où le balai passe d'une touche à la suivante, le courant s'intervertit dans l'induit et il en résulte une perte d'énergie égale à $\frac{lI^2}{8}$ par bobine élémentaire, l étant le coefficient de self-induction de ces bobines; cet effet se reproduit deux fois par tour pour chacune d'elles. Pour N bobines, nous aurons donc une perte égale à $\frac{2nNlI^2}{8} = \frac{nL_sI^2}{4}$ par seconde, n étant le nombre de tours par seconde.

Nous aurons donc, pour la perte par seconde,

$$\frac{1650}{60} \times \frac{0,0152 \times 10^9}{4} \times \overline{20,4}^2 \times 10^{-2},$$
$$= 43,5 \times 10^7 \text{ ergs par seconde,}$$
$$= 435 \text{ megergs,}$$
$$= 4,75 \text{ kilogrammètres par seconde.}$$

Cette perte est égale à celle que produirait une augmentation nL_s de résistance de l'armature : elle est augmentée sensiblement par les effets de mutuelle induction des bobines élémentaires.

11. *Une génératrice compound a une force électromotrice constante de* 110 *volts à une vitesse déterminée; quel courant pourra-t-on lui faire produire en l'actionnant par un moteur dont la puissance effective est de* 10 *chevaux, en tournant à la même vitesse?*

Si le rendement de la génératrice était égal à l'unité, on aurait

$$I = \frac{736 \times 10}{110} = 66,9 \text{ ampères.}$$

Mais cette hypothèse n'est point réalisée : pour un rendement ρ on aura

$$I = \rho \frac{736 \times 10}{110}.$$

Faisons $\rho = 0,75$

$$I = 50,17 \text{ ampères.}$$

12. *Une dynamo génératrice reçoit* 100 *chevaux; elle donne* 2000 *volts entre ses bornes et, dans des conditions déterminées de la résistance extérieure, elle fournit un courant de* 30 *ampères; quelle est, en kilowatts, l'énergie disponible? Dire quel est le rendement industriel de cette installation.*

$$\mathcal{P}_m = \text{Énergie dépensée : } 100 \times 736 = 73600 \text{ watts,}$$
$$= 73,6 \text{ kilowatts.}$$
$$\mathcal{P}_\varepsilon = \text{Énergie disponible : } 2000 \times 30 = 60000 \text{ watts.}$$
$$= 60 \text{ kilowatts.}$$

$$\text{Rendement industriel} = \frac{\mathcal{P}_\varepsilon}{\mathcal{P}_m} = \frac{60}{73,6} = 0,81.$$

13. *Dans les expériences faites en* 1882 *entre Munich et Miessbach, la génératrice donnait* 1340 *volts entre ses bornes et elle fournissait un courant de* 0,52 *ampère; sa résistance intérieure atteignait* 450 *ohms. Quel était le rendement électrique de cette machine?*

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \text{Énergie disponible : } 1340 \times 0,52 = 697 \text{ watts.}$$

Le courant étant de 0,52 ampère, l'énergie consommée dans la machine était de

$$\overline{0,52}^2 \times 450 = 122,13 \text{ watts.}$$

Cette énergie est à ajouter à $\mathcal{P}_\varepsilon$ pour avoir $\mathcal{P}_e$.

Nous aurons donc

$$\mathcal{P}_e = 697 + 122,13 = 819,13 \text{ watts.}$$

Par suite, le rendement électrique a été égal à

$$\frac{\mathcal{P}_\varepsilon}{\mathcal{P}_e} = \frac{697}{819,13} = 0,86.$$

14. *Une machine à vapeur fait* 10 *chevaux en actionnant*

une dynamo; la résistance intérieure de cette génératrice est égale à 0,226 *ohms, dont* 0,195 *pour l'induit et* 0,031 *pour l'électro-inducteur. Entre les bornes, la différence de potentiel est de* 105 *volts; l'intensité du courant est de* 52 *ampères. Combien de calories se produit-il dans l'induit par heure et quels sont les divers rendements de cette dynamo?*

L'énergie absorbée dans l'induit est $\frac{I^2R}{9,81}$ en kilogrammètres par seconde; il est donc aisé de calculer les calories produites par seconde dans l'armature.

Par seconde : $w = \frac{1}{425} \times \frac{\overline{52}^2 \times 0,195}{9,81} = 0,1265$ calorie.

Par heure : $w = 455$ calories.

Le rendement industriel $\frac{\mathcal{P}_\varepsilon}{\mathcal{P}_m} = \frac{52 \times 105}{7360} = 0,74$.

Pour les autres rendements, il faut connaître le travail électrique : l'énergie absorbée par les résistances intérieures est, en watts, égale à

$$\overline{52}^2 \times 0,226 = 611 \text{ watts.}$$

Or on a recueilli $52 \times 105 = 5460$ watts.

Il vient donc

$$\mathcal{P}_e = 611 + 5460 = 6071 \text{ watts,}$$

et le rendement théorique sera

$$\frac{\mathcal{P}_e}{\mathcal{P}_m} = \frac{6071}{7360} = 0,82.$$

Le rendement électrique $\frac{\mathcal{P}_\varepsilon}{\mathcal{P}_e} = \frac{52 \times 105}{6071} = 0,80$.

15. *Pour actionner une dynamo compound de* 102 *volts et* 40 *ampères, je ne dispose que d'un moteur à gaz de* 3 *chevaux de puissance. On m'impose de marcher à la vitesse normale de la dynamo, qui est de* 1100 *tours; combien recueillerai-je d'ampères? Quel serait le résultat si je marchais à* 900 *tours seulement?*

Dans le premier cas, je ne pourrai évidemment pas obtenir de la dynamo l'énergie électrique sur laquelle j'aurais eu le droit de compter avec un moteur suffisant à la tâche, car $102 \times 40 = 4080$ watts, alors que le moteur n'en peut que $3 \times 736 = 2208$.

Mais la dynamo est compound; à la vitesse de 1100 tours, elle donnera donc 102 volts; la réduction portera sur les ampères, qui ne pourront théoriquement dépasser $\frac{2208}{102} = 21,6$, et qui seront en pratique loin d'y atteindre.

Or, à 900 tours, la différence de potentiel ne sera plus que de $\frac{9}{11} \times 102 = 83,5$ volts : dans ces conditions, nous pourrons obtenir théoriquement $\frac{2208}{83,5} = 26,4$ ampères.

Il y a donc des cas dans lesquels il y aura avantage à ralentir la machine pour en obtenir plus de courant : mais ce bénéfice sera acheté par une perte de voltage.

16. *Une série-dynamo a une résistance intérieure de* 9,86 *ohm; entre ses bornes, elle donne* 104 *volts à circuit ouvert. Quelle sera l'intensité du courant si l'on établit un court circuit entre les bornes, et quelle devra être la puissance de la machine motrice, sachant que le rendement industriel est égal à* 0,81 *? Quelles seront la différence de potentiel aux balais et l'intensité du courant, quand la résistance extérieure atteindra* 6 *ohms?*

En court circuit, nous aurons

$$I = \frac{E}{r} = \frac{104}{0,86} = 121 \text{ ampères.}$$

Le rendement industriel étant de 0,81, la puissance du moteur devra être alors de

$$\frac{104 \times 121}{0,81} = 15,536 \text{ kilowatts,}$$
$$= 21 \text{ chevaux.}$$

Normalement, il ne fallait, en travail maximum, que la moitié de cette puissance.

Pour une résistance extérieure de 6 volts, nous aurons

$$x = E\frac{R}{R+r} = 104 \times \frac{6}{6,86} = 90,5 \text{ volts.}$$

17. *Une machine Thury donne* 320 *volts aux bornes et* 10,5 *ampères dans un circuit extérieur de résistance* R *inconnue : on sait que les résistances de l'induit et de l'inducteur sont* $r_i = 2,18$ *et* $r_s = 4,53$ *ohms. Quelle est la force électromotrice de cette machine? Quelle est aussi la résistance extérieure* R?

Nous avons d'abord

$$\frac{E}{I} = r_s + R,$$

d'où

$$R = \frac{320}{10,5} - 4,53 = 30,47 \text{ ohms.}$$

La force électromotrice de la machine est celle qui est développée dans l'induit; elle est égale à celle qui a été relevée entre les bornes, augmentée de la perte subie dans l'induit,

$$x = E + Ir_i = 320 \times 10,5 \times 2,18 = 342,89 \text{ volts.}$$

18. *Une shunt-dynamo donne* 8,3 *ampères par* 149 *volts. Les résistances intérieures sont les suivantes : pour l'induit,* $r_i = 9,32$ *ohm et pour l'inducteur* $r_s = 1,46$ *ohm. Quelle est la force électromotrice vraie de ce générateur?*

Si nous connaissions l'intensité I_i du courant dans l'induit, nous pourrions égaler à la force électromotrice vraie le produit de I_i par R, la résistance totale du circuit et nous aurions

$$E = I_i R.$$

Or,

$$I_i = I_s + I_e,$$

I_s étant l'intensité du courant excitateur du champ et I_e celle du courant extérieur.

De plus,

$$R = r_1 + \frac{r_s r_e}{r_s + r_e}. \tag{22}$$

Donc

$$E = (I_s + I_e)\left(r_1 + \frac{r_s r_e}{r_s + r_e}\right).$$

Appelons E′ la force électromotrice relevée entre les bornes; nous savons que

$$I_s = \frac{E'}{r_s} \quad \text{et} \quad r_e = \frac{E'}{I_e}.$$

Il ne reste qu'à substituer.

Mais on peut simplifier les calculs, en procédant de la manière suivante.

$$E' = I_e r_e = I_s r_s,$$
$$E = E' + I_i r_i,$$
$$I_i = E'\left(\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r_e}\right).$$

Donc

$$E = E' + E' r_i\left(\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r_e}\right) = E' r_i\left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_s} + \frac{1}{r_e}\right).$$

Cette formule est très élégante, mais il nous manque r_e : il est vrai que $r_e = \frac{E'}{I_e} = \frac{149}{8,3}$.

On trouve finalement

$$E = 178 \text{ volts}.$$

19. *Une shunt-dynamo donne un courant* I_e *dans une résistance extérieure* r_e *: quel est son rendement électrique?*

Le rendement électrique a pour expression $\frac{\mathcal{P}_\varepsilon}{\mathcal{P}_e}$:

$$\mathcal{P}_\varepsilon = I_e^2 r_e = E' I_e.$$

Pour ce qui est de $\mathcal{P}_\varepsilon$, nous aurons

$$\mathcal{P}_e = I_e^2 r_e + I_i^2 r_i + I_s^2 r_s.$$

Or,

$$I_s = I_e \frac{r_e}{r_s}; \qquad I_i = I_e \frac{r_e + r_s}{r_s}.$$

Substituant, nous trouvons

$$\frac{\mathfrak{P}_t}{\mathfrak{P}_e} = r_e \frac{r_s^2}{(r_e + r_s)[r_e(r_i + r_s) + r_i r_s]}.$$

On voit que I_e a disparu de la valeur du rendement, mais nous y retrouvons r_e et c'est, en somme, de cette résistance que dépend le rendement.

Le maximum du rendement correspond à la valeur de r_e qui annule la dérivée du rendement par rapport à cette résistance : on trouve

$$r_e^2 = \frac{r_i r_s^2}{r_i + r_s}.$$

20. *On a mesuré les résistances de l'induit et de l'inducteur en dérivation d'une shunt-dynamo et l'on a trouvé* $r_i = 0{,}015$ *ohm et* $r_s = 38{,}5$ *ohms. A sa vitesse de régime normal, la machine donne* 180 *volts aux bornes et* 35 *ampères dans le circuit extérieur. Quelles sont les pertes relatives dans l'induit et dans l'inducteur, rapportées à l'énergie disponible?*

L'énergie disponible est égale à $180 \times 35 = 8300$ watts.

L'intensité I_s dans la dérivation est connue, car nous savons que

$$I_s = \frac{E}{r_s} = 4{,}67 \text{ ampères.}$$

L'énergie absorbée dans le shunt est

$$W_s = I_s^2 r_s = \frac{E^2}{r^s} = 843 \text{ watts.}$$

La proportion relative à l'énergie disponible est de

$$\frac{843}{8300} = 0{,}101 \qquad \text{soit } 10{,}1 \text{ pour } 100.$$

C'est le prix de l'excitation du champ.

Nous aurons de même

$$W_i = I_i^2 r_i = (I_e + I_s)^2 r_i = (35,0 + 4,67)^2 0,015 = 23,6 \text{ watts.}$$

La perte subie de ce chef est donnée par le quotient $\frac{23,6}{8300}$ et l'on voit qu'elle n'atteint même pas 0,3 pour 100.

21. *Dans une dynamo-compound, l'induit a une résistance de* 0,103 *ohm; le fil en série servant à l'induction a une résistance* $r_s = 0,052$ *ohm et le fil en dérivation atteint une résistance* $r'_s = 34,5$ *ohms. Entre les bornes, la différence de potentiel est* $E' = 150$ *volts; le courant dans le circuit extérieur a une intensité de* 75 *ampères, à la vitesse de régime. Quelle est la force électromotrice de cette machine et quelle est la valeur du rendement électrique?*

Le courant engendré dans l'armature d'induit se bifurque aux balais en deux autres dont l'un traverse le fil en dérivation, de résistance r_s et l'autre le second fil dérivé, de résistance r_s, unis en série avec le circuit extérieur. Le courant de l'armature est donc égal à la somme des courants parcourant ces deux branches.

$$I_i = I_s + I'_s.$$

Or nous avons les relations

$$\frac{I'_s}{I_s} = \frac{R + r_s}{r'_s} \qquad \text{et} \qquad R = \frac{E'}{I_s} = \frac{150}{75} = 2;$$

R est la résistance du circuit extérieur.

Il vient donc

$$I'_s = I_s \frac{2,052}{34,50} = 0,059 I_s$$

et

$$I_i = 1,059 \times 75 = 79,50 \text{ ampères.}$$

Pour calculer la force électromotrice vraie, cherchons d'abord la résistance opposée au courant par l'ensemble des deux circuits dérivés sur les balais; leurs résistances respec-

tives étant $R + r_s$ et r'_s, la résistance résultante sera

$$(22) \qquad \frac{(R + r_s) r'_s}{R + r_s + r'_s}.$$

Appliquons la seconde loi de Kirchhoff, nous aurons

$$E = I_i r_i + (I_s + I'_s) \frac{(R + r_s) r'_s}{R + r_s + r'_s} = I_i \left[r_i + \frac{(R + r_s) r'_s}{R + r_s + r'_s} \right]$$
$$= 153,1 \text{ volts.}$$

Le rendement électrique s'obtient en divisant $I_s^2 R$ par EI_i; nous obtenons

$$\rho = 0,91.$$

CHAPITRE XVIII.

CALCULS D'ÉTABLISSEMENT DES DYNAMOS.

1. *On construit une dynamo dans laquelle on sait que le flux de force issu d'un des pôles inducteurs sera égal à* φ : *l'anneau bipolaire de l'induit est recouvert de* N *tours de fil; quelle vitesse donnera-t-on à l'induit pour y développer* 50 *volts? On fera* $\varphi = 0,6 \times 10^6$ C.G.S. *et* $N = 900$.

Le flux coupé est proportionnel à N, nombre de tours de fil, et à n, nombre de révolutions par seconde; on sait donc que, si tout le flux est utilisé, on a

$$E = nN\varphi \text{ U.E.M.} = nN\varphi \times 10^{-8} \text{ volts.}$$

On déduit de cette formule

$$n = \frac{E \times 10^8}{N\varphi} = \frac{50 \times 10^8}{900 \times 0,6 \times 10^6} = 9,26.$$

La machine devra donc effectuer $9,26 \times 60 = 556$ tours par minute; E est la force électromotrice développée dans l'induit.

2. *Le noyau de fer d'un anneau de Gramme est formé de plaques de tôle vernies; il a une épaisseur de* 3^{cm} *et une longueur de* 9^{cm}; *on admet pour la valeur maximum du champ une intensité moyenne de* 12000 C.G.S. *L'anneau faisant* 20 *tours par seconde, on demande quel devra être le nombre de spires* N *de l'anneau pour développer une force électromotrice de* 20 *volts?*

La section transversale du fer de l'anneau est de $3 \times 9 = 27^{cm^2}$,

mais l'interposition du vernis entre les feuilles de tôle réduit cette valeur de près de $\frac{2}{10}$, soit à 22^{cm^2} : c'est la valeur réelle de la section S à introduire dans le calcul.

Le flux de force sera égal à HS dans chaque moitié de l'anneau; le flux total sera double, ce qui donne

$$\varphi = 2HS;$$

nous aurons donc

$$E = 2nNHS;$$

d'où

$$N = \frac{E}{2nHS}.$$

Passant aux chiffres, il vient

$$N = \frac{20 \times 10^8}{2 \times 20 \times 12000 \times 22} = 190 \text{ spires.}$$

Il suffira de 10 touches sur le collecteur.

Chaque spire aura une longueur d'au moins $2(3+9) = 24^{cm}$, et la longueur totale du fil sera égale à $190 \times 24 = 45^m,60$. Sa section sera déterminée par la résistance fixée, laquelle dépend de la perte consentie dans l'induit.

3. *Le noyau de fer d'une armature en anneau a* 8^{cm} *de diamètre extérieur,* 5^{cm} *de diamètre intérieur et une longueur de* 6^{cm} *suivant son axe : il porte* 2000 *spires et fait* 2000 *tours par minute. On veut qu'il s'y développe une force électromotrice de* 100 *volts; la surface des pièces polaires étant de* 60^{cm^2}, *on demande quelle devra être l'intensité vraie et l'intensité moyenne du champ?*

Nous calculerons le flux par la formule

$$\varphi = \frac{E \times 10^8}{\frac{n}{60} N} = \frac{60 \times 100 \times 10^8}{2000 \times 2000} = 150000.$$

La section du noyau de fer est égale à $1,5 \times 6 = 9^{cm^2}$, mais le flux se partage en deux suivant ce noyau et il convient de doubler cette surface; de plus, notons que le vernis isolant

réduit la section vraie de $\frac{2}{10}$, de sorte que nous avons

$$S = 9 \times 2 \times 0,8 = 14^{cm^2},4.$$

L'induction magnétique $\mathfrak{B}$ sera

$$\mathfrak{B} = \frac{\varphi}{S} = \frac{150000}{14,4} = 10410;$$

ce nombre est acceptable.

La surface polaire S étant donnée, nous aurons

$$H = \frac{150000}{60} = 2500 \text{ C.G.S.}$$

C'est la valeur vraie du champ; la valeur moyenne sera moindre : elle s'obtiendrait en divisant φ par le développement de la surface des pièces polaires, qui est généralement supérieure à leur section droite.

4. *On veut obtenir un flux* φ *avec un électro-inducteur dont le circuit total a une longueur* l, *et qui porte* N *tours de fil, sur un noyau de section* S, *la perméabilité du fer étant* μ; *quelle devra être en ampères l'intensité du courant excitateur?*

On peut écrire successivement

$$(30\ bis)\qquad \begin{cases} H = 4\pi \dfrac{N}{l} I; \qquad \mathfrak{B} = \mu H; \\ \varphi = \mathfrak{B} S = 4\pi \dfrac{N}{l} \mu S I. \end{cases}$$

Nous aurons donc

$$I = \frac{\varphi l}{4\pi N \mu S}.$$

5. *Une série-dynamo doit donner* 40 *ampères sur une résistance extérieure* R *de* 2,5 *ohms par* 100 *volts aux bornes, quelle devra être sa force électromotrice induite totale, si la résistance de l'induit égale* 0,3 *ohm et celle de l'inducteur* 0,5 *ohm?*

Soient E′ la force électromotrice aux bornes et E la force

totale; nous savons que

$$E' = RI$$

et

$$E = E' + (r_i + r_s)I.$$

Donc

$$\frac{E'}{E} = \frac{R}{R + r_i + r_s} = \frac{2,5}{2,5 + 0,3 + 0,5} = 0,75,$$

$$E = \frac{100}{0,75} = 133 \text{ volts.}$$

Il est utile de remarquer que le rapport $\frac{E'}{E}$ est précisément la valeur du rendement électrique de la machine; il est manifeste qu'il augmente avec R.

6. *Quelle devra être la résistance intérieure d'une série-dynamo pour qu'elle ait un rendement électrique égal à* 0,82, *quand elle alimentera un circuit extérieur d'une résistance de* 10 *ohms?*

Cette question est résolue par le problème précédent; soit ρ le rendement proposé.

$$\rho = \frac{R}{R + r},$$

$$r = R\,\frac{1 - \rho}{\rho}$$

$$= 10 \times \frac{0,18}{0,82} = 2,19 \text{ ohms.}$$

7. *Un constructeur a calculé qu'il lui fallait un flux utile de* 100000 *unités dans le noyau d'un induit. L'entrefer a* $0^{cm},5$; *la longueur des lignes de force dans le noyau induit est de* 10^{cm}; *la longueur des deux noyaux de l'électro-inducteur, de la culasse et des pièces polaires est de* 28^{cm}; *tout ce circuit magnétique est en fer doux. On admet que l'induction magnétique est égale à* 10000 *dans ce fer : la section des noyaux est déterminée par cette valeur de* $\mathfrak{B}$. *La surface des pièces polaires*

est $S = 60^{cm^2}$. *Calculer sur ces données les ampères-tours nécessaires à l'excitation.*

La loi de continuité qui régit les flux magnétiques, lesquels forment des courbes continues fermées sur elles-mêmes, autorise à appliquer aux circuits magnétiques des relations analogues à celles qu'on emploie pour les circuits électriques. Rappelant donc les formules connues,

$$\mathfrak{B} = \mu H, \qquad H = 4\pi N_1 I = \frac{4\pi NI}{l},$$

$$\varphi = \mathfrak{B} S = 4\pi \frac{NI}{l} \mu S,$$

nous voyons que nous pouvons écrire, pour l'ensemble du circuit,

$$\begin{aligned} 4\pi NI &= \varphi\left(\frac{l}{\mu S} + \frac{l'}{\mu' S'} + \frac{l''}{\mu'' S''}\right) \\ &= \frac{\mathfrak{B} l}{\mu} + \frac{\mathfrak{B}' l'}{\mu'} + \frac{\mathfrak{B}'' l''}{\mu''} \\ &= H l + H' l' + H'' l'' = \Sigma H l. \end{aligned}$$

Pour l'usage pratique, on pose

$$NI = \frac{1}{12,57} \Sigma H l \text{ en U.E.M.}$$

Or, nous aurons, pour le champ de l'entrefer,

$$H = \frac{\varphi}{S} = \frac{100000}{60} = 1666;$$

dans les noyaux

$$H' = \frac{\mathfrak{B}'}{\mu'} = \frac{10000}{2000} = 5;$$

la valeur de μ est relevée dans les Tables de la page 62.

Il vient donc

$$NI = \frac{1}{12,57}(2 \times 1666 \times 0,5 + 10 \times 5 + 30 \times 5) = 149,3 \text{ U.E.M.}$$

Comme il y a toujours une certaine perte de flux, de près

de 20 pour 100, on fera bien d'augmenter ce nombre de 20 pour 100 et de le porter à 180,0.

Les ampères-tours seront 10 fois plus grands, soit 1800; il n'y a donc qu'à diviser 1800 par l'intensité du courant en ampères pour connaître le nombre de spires N.

8. *Quelles conditions faut-il réaliser pour qu'une série-dynamo soit auto-excitatrice?*

L'intensité I du courant est donnée par les relations

$$I = \frac{E}{r_i + r_s + R} = \frac{n N \varphi}{r_i + r_s + R} = \frac{4\pi N I}{(r_i + r_s + R)(\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_s + \mathcal{R}_e)},$$

en appelant $\mathcal{R}_i$, $\mathcal{R}_s$ et $\mathcal{R}_e$ les résistances magnétiques du circuit; or, au début de l'excitation, la résistance de l'entrefer est de beaucoup la plus grande et nous aurons alors

$$4\pi n N = (r_i + r_s + R)\mathcal{R}_e.$$

L'amorçage ayant lieu en court circuit, R est nul et il reste pour la valeur maximum de $\mathcal{R}_e$

$$\mathcal{R}_e \leqq \frac{4\pi n N}{r_i + r_s}.$$

Le constructeur doit donc se préoccuper des grandeurs relatives de $\mathcal{R}_e$, r_i et r_s.

9. *Un amateur projette de construire une shunt-dynamo, donnant* 100 *volts et* 40 *ampères, par une vitesse de* 1000 *révolutions par minute; il consent une perte de* 5 *pour* 100 *dans l'induit et de* 3 *pour* 100 *dans la dérivation de l'inducteur. Calculer sur ces données les principaux éléments de cette machine.*

La puissance totale à développer doit être calculée d'abord. Il faut pour cela tenir compte des pertes; or il peut se perdre 5 pour 100 de l'énergie dans l'induit et 3 pour 100 dans le fil d'excitation, soit 8 pour 100. Nous aurons donc, en appelant $\mathcal{P}_e$

la puissance électrique à créer,

$$0,92\,\mathfrak{P}_e = 4000 \text{ watts};$$

$$\mathfrak{P}_e = \frac{4000}{0,92} = 4348 \text{ watts}.$$

La perte dans l'induit sera de $4348 \times 0,05 = 219$ watts; elle est produite par la résistance du fil induit r_i. Admettons que le courant ait une intensité de 40 ampères dans l'induit, nous aurons

$$219 = I^2 r_i = \overline{40}^2 \times r_i;$$

$$r_i = \frac{219}{1600} = 0,136 \text{ ohm}.$$

Quel sera le nombre de spires de l'induit? Pour répondre à cette question, observons que la force électromotrice totale doit être de

$$100 + 0,136 \times 40 = 105,44 \text{ volts}.$$

Donnons-nous comme condition à satisfaire ultérieurement que φ soit égal à 2×10^6; comme $E = n.N\varphi\,10^{-8}$ volts, nous aurons

$$N = \frac{E.10^8}{n\varphi} = \frac{105,44 \times 10^8 \times 60}{1000 \times 2 \times 10^6} = 317 \text{ spires}.$$

On pourra réunir 60 lames au collecteur, ce qui fera 5 à 6 spires par lame. Le diamètre de l'induit dépendra du volume libre dans l'entrefer et par suite de la longueur qu'on pourra donner à ce fil. Nous ne faisons que signaler ce calcul.

Mais il faut disposer l'inducteur de telle façon que φ soit égal à 2×10^6, ce qui est déjà une valeur considérable du flux de force. Or nous avons trouvé ci-dessus une relation entre le flux φ et l'intensité du courant circulant dans le fil de l'inducteur :

$$\varphi = 4\pi \frac{N}{l} \mu SI.$$

Nous pouvons donc calculer NI, c'est-à-dire les ampères-tours de l'inducteur.

Pour être sûr du résultat et en prévision des pertes de flux,

nous prendrons pour φ la valeur $2 \times 10^6 \times 1,33 = 2,66 \times 10^6$.

Mais il faut donner à I, dans cette formule, la valeur de l'intensité correspondante à la dérivation : elle est beaucoup moindre que 40 ampères; appelons-la x. Elle peut se déterminer par le taux de la perte consentie; en effet, nous écrirons successivement

$$4348 \times 0,03 = 130,4 \text{ watts};$$

$$130,4 = x^2 r_s,$$

$$x r_s = 100,$$

$$x = 1,3 \text{ ampère},$$

$$r_s = \frac{100}{1,3} = 77 \text{ ohms}.$$

Le fil peut donc être long et fin; en disposant convenablement de l et S, en prenant pour μ une valeur moyenne de 500, on fera un premier calcul qui donnera les ampères-tours NI.

Il peut arriver que ce premier résultat ne soit pas acceptable, par suite des difficultés d'exécution des inducteurs; mais on arrivera toujours par tâtonnement à répondre aux conditions proposées.

Du reste, il ne faut pas se faire d'illusion sur la portée des calculs que nous venons d'effectuer; ils ne fournissent aux constructeurs qu'une première indication générale.

10. *Calculer la perte d'énergie produite par la self-induction prévue d'une armature à anneau d'induit?*

Au moment où le balai quittera une lame du collecteur pour appuyer sur une autre, le courant s'annulera dans la bobine correspondante et il y changera de sens. Appelons λ le coefficient de self-induction d'une bobine et soit I l'intensité du courant que devra fournir la machine : comme le courant se bifurque dans les armatures à anneau, nous aurons une perte d'énergie égale à

$$\frac{1}{2} \lambda \frac{I^2}{4} \tag{44}$$

par bobine. Cet effet se reproduit deux fois par tour pour chacune d'elles; s'il y a p bobines, la perte totale sera

$$2p\frac{1}{2}\lambda\frac{I^2}{4}=p\lambda\frac{I^2}{4}=L_s\frac{I^2}{4}.$$

Pour n tours, il faudra compter sur une perte d'énergie égale à

$$nL_s\frac{I^2}{4}.$$

11. *Quelles sont les diverses pertes à prévoir dans les calculs d'établissement d'une dynamo?*

1° Le flux dans les inducteurs n'est pas entièrement utilisable : le coefficient de perte varie de 1,30 à 2; dans les machines d'un même type et de dimensions croissantes, le flux perdu diminue généralement. Les inducteurs Edison sont exposés à des dérivations de flux par leur socle, bien qu'on les fasse en zinc ou en fonte manganésifère.

2° Le flux subit aussi une réduction par suite de la réaction de l'induit. M. Hopkinson a indiqué un moyen de calculer cette perte en fonction de l'angle de calage, mais on l'évalue arbitrairement le plus souvent, en augmentant les ampères-tours calculés de 15 à 25 pour 100.

3° L'hystérésis et les courants de Foucault entraînent une perte de travail qu'on évalue par la formule de Steinmetz en fonction de $\mathfrak{B}$; la perte par centimètre cube de fer et par cycle est égale à $0,005\mathfrak{B}^{1,6}$, et elle est exprimée en ergs. Pour n tours par minute et pour v^{cm^3} de fer dans le noyau, on aura une perte de

$$\frac{0,005\mathfrak{B}^{1,6}vn}{60\times 10^7}\text{ watts.}$$

4° Enfin il y a des pertes produites par la résistance du fil de l'induit et de l'inducteur : elles ont été calculées ci-dessus.

12. *Faire le projet d'une série-dynamo à anneau donnant* 60 *volts aux bornes,* 120 *ampères à la vitesse de* 1000 *tours par minute.*

Cet exercice est une récapitulation des précédents : nous

donnerons la marche des calculs sans explication nouvelle.

Calcul de l'induit. — Admettons une perte de 5 pour 100 dans l'induit, soit de

$$0,05 \times 60 \times 120 = 360 \text{ watts},$$

$$I_i^2 r_i = 360, \qquad r_i = \frac{360}{120^2} = 0,023 \text{ ohm}.$$

Prenons un noyau d'anneau de longueur $l = 15^{cm}$, de diamètre extérieur $D = 22^{cm}$ et d'épaisseur $e = 5^{cm}$.

La double section S de ce noyau sera

$$2 \times 15 \times 5 = 150^{cm^2},$$

soit pour le fer seul

$$150 \times 0,8 = 120^{cm^2}.$$

Le nombre de spires N de l'induit sera

$$\frac{E + I_i r_i}{n \varphi 10^{-8}} = \frac{60 + 0,023 \times 120}{16,6 \varphi 10^{-8}} = \frac{62,76}{\varphi 16,6 . 10^{-8}}.$$

Or

$$\varphi = \mathfrak{B} S = 16000 \times 120 = 1,92 \times 10^6.$$

Donc

$$N = \frac{6276}{1,92 \times 16,6} = 196 \text{ spires}.$$

La longueur du fil induit sera de

$$196 \times 2(15 + 5) = 7840^{cm}.$$

On déduira le diamètre du fil de sa résistance : $d = 0,83$.

Calcul de l'inducteur. — Nous avons

$$\varphi = 1,92 \times 10^6.$$

L'intensité du champ sera $H = \frac{\varphi}{S'}$, si nous appelons S' la surface des pièces polaires; faisons $S' = 360^{cm^2}$, nous aurons

$$H = 5333 \text{ C.G.S.}$$

Prenons $\mathfrak{B} = 12000$; il viendra pour la surface S″ du noyau de l'inducteur, avec 20 pour 100 de perte,

$$S'' = \frac{1,20 \times 1,92 \times 10^6}{12000} = 192^{cm^2}.$$

On en déduit le diamètre du noyau et les dimensions de la culasse.

Pour calculer les ampères-tours de l'inducteur, il est nécessaire de se donner préalablement les longueurs des lignes de force.

Prenons

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Dans l'entrefer.....} & l_e = 1,1^{cm} \\ \text{Dans l'électro.....} & l_s = 25 \\ \text{Dans l'induit.....} & l_i = 26,5 \end{array}\right\} \frac{\mathfrak{B}}{\mu} = \frac{12000}{1412} = 8,5.$$

$$NI = \frac{1}{1,25}\,(\underbrace{2 \times 1,1 \times 5333}_{\text{Entrefer.}} + \underbrace{25 \times 8,5}_{\text{Électro.}} + \underbrace{26,5 \times 8,5}_{\text{Induit.}})$$
$$= 12170 \text{ ampères-tours.}$$

En estimant à 15 pour 100 la réaction de l'induit, nous serons conduits à 14000 ampères-tours, soit à 117 spires. On calculera le diamètre du fil par sa longueur et par la perte consentie dans l'inducteur. Enfin, on augmentera de 10 pour 100 le nombre de spires pour tenir compte des pertes non évaluées.

13. *Calculer la valeur du flux nécessaire dans le cas d'une armature Siemens à tambour, portant* N *spires et devant développer* E *volts.*

Le bobinage d'une armature à tambour a l'avantage de supprimer le fil intérieur de l'anneau Gramme, qui est inactif au point de vue de l'induction et, par suite, nuisible par sa résistance. Tout le fil étant placé sur les génératrices extérieures, il n'y a donc de perte que par les abouts du tambour.

Les fils situés sur les génératrices diamétralement opposées coupent les lignes de force du champ de l'entrefer en sens contraires, et il s'y développe des forces électromotrices d'induction qui s'ajoutent et doublent l'effet.

Nous aurons, par suite,

$$\varphi = \frac{60}{2n} \frac{E \times 10^8}{N} = \frac{30}{n} \frac{E \times 10^8}{N}.$$

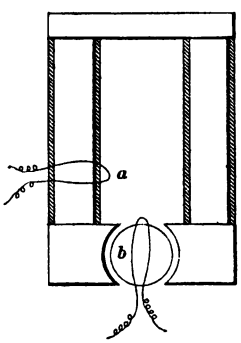
L'intensité du champ peut donc être réduite de moitié, ou bien l'on peut réduire la vitesse angulaire de l'armature, à égalité de nombre des spires.

CHAPITRE XIX.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES DYNAMOS.

1. *Une dynamo bipolaire Edison Hopkinson, à anneau, a de longs inducteurs en fer à cheval dans lesquels on peut déterminer les pertes de flux de la manière suivante* (*fig.* 41) :

Fig. 41.



une spire de fil entourant une des branches, en a par exemple, on supprime brusquement le courant excitateur et l'on mesure la quantité d'électricité induite par l'élongation obtenue dans un galvanomètre balistique. On répète la même expérience en enroulant la même spire autour de l'induit en b; la résistance du circuit de décharge doit être la même que ci-dessus. Le rapport entre les élongations est égal à x : quel est le rapport du flux perdu au flux total?

Soit φ le flux utile dans l'induit; le flux total est $x\varphi$ et le

flux perdu est $(x-1)\varphi$; le rapport cherché est donc égal à $\frac{x-1}{x}$.

2. *Pour connaître les valeurs progressives du flux utile d'une dynamo, quand elle tourne sous des régimes d'excitation croissant régulièrement, on l'excite par une source indépendante et on relève au voltmètre les différences de potentiel aux bornes en circuit ouvert. Pour* 1000 *révolutions à la minute, et* 560 *spires sur l'anneau induit, on observe* 105 *volts : quelle est la valeur correspondante du flux utile?*

Soit φ la valeur du flux utile, issu des pôles inducteurs; si l'induit est à anneau bipolaire, ce flux suivra les deux moitiés de l'induit et se partagera en deux parties égales. Pour une révolution complète, la variation du flux sera donc quatre fois égale à $\frac{\varphi}{2}$, soit égale à 2φ (¹). La force électromotrice *moyenne* par tour serait par suite $2\varphi N$, pour les N spires de fil. Pour n révolutions, nous trouverions

$$E = 2\varphi n N.$$

Or, s'il y a N spires sur l'anneau, la moitié seulement sera en tension, de sorte que finalement

$$E = \varphi n N \text{ U.E.M.}$$

Notons que n est rapporté à la seconde dans cette formule. Le calcul donnera

$$\varphi = \frac{E}{nN} = \frac{105 \times 10^8 \times 60}{560 \times 1000} = 1,125 \times 10^6.$$

Les mêmes considérations nous feraient voir que pour un induit à tambour (Siemens ou Edison) on aurait un flux φ avec N spires en tension, ce qui mène au même résultat.

(¹) Il faut observer, pour l'intelligence du texte, que pour un tour complet le flux sera successivement o, $\frac{\varphi}{2}$, o et $\frac{\varphi}{2}$, ce qui fait bien quatre fois une variation de $\frac{\varphi}{2}$.

Un induit multipolaire à noyau ou à disque enroulé en quantité conduira aussi à la même formule, sur la généralité de laquelle nous n'insisterons pas davantage.

3. *Pour mesurer l'intensité* H *du champ d'une machine magnéto dans l'entrefer, on fait faire à la main un demi-tour exact à l'armature d'induit; on note une déviation de* 54° *à un galvanomètre balistique mis dans le circuit. Puis on démonte l'armature, on la retire de la machine et on l'installe en un point où la composante verticale* V *de l'intensité du magnétisme terrestre soit bien connue : son axe devra être horizontal et dirigé dans le plan du méridien. Une rotation de* 180° *donne au galvanomètre une déviation, mesurée au miroir, de* 0°25'. *Quelle est la valeur de* H?

Il est évident qu'on a, entre l'intensité H du champ à mesurer et la composante verticale V du champ terrestre, la relation

$$\frac{H}{V} = \frac{\sin 27^\circ}{\sin 0^\circ 12',5} = 120,1.$$

Or V est généralement connu dans les laboratoires dans lesquels on se propose de faire cette détermination : à Lille, par exemple, dans mon service de la Faculté libre des Sciences, on aurait

$$V = 0,189 \tang i,$$

i étant l'angle d'inclinaison égal à 66°23'; nous écrirons par suite

$$V = 0,189 \tang 66^\circ 23' = 0,432.$$

Donc

$$H = 0,432 \times 120,1 = 52 \text{ C.G.S.}$$

On voit que ce procédé ne convient pas à la mesure des champs intenses, à moins qu'on n'emploie un galvanomètre shunté : or, dans ce cas, la self-induction des cadres intervient et la répartition des courants se fait anormalement entre les circuits du galvanomètre et du shunt. Néanmoins, pour une première approximation, le procédé reste accep-

table et l'on peut l'employer dans un grand nombre de cas [1].

4. *Pour mesurer la surface totale* S *équivalente à celle d'une armature d'induit Siemens en navette, avec noyau de fer, on procède expérimentalement ainsi qu'il suit : l'induit ayant été démonté, on place son axe dans le méridien et ses spires sont mises horizontalement; on relie ses extrémités à un circuit renfermant un galvanomètre balistique et un cadre étalon, de surface* S' *connue, dont les spires ont aussi été disposées horizontalement. Une rotation de* 180° *du cadre étalon donne une déviation* δ; *une rotation égale de l'induit donne* δ' : *calculer d'après cela la surface* S.

On aura évidemment

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta'}.$$

Nous avons employé cette méthode avec succès; notre cadre de comparaison est rectangulaire; il mesure $73^{cm},2$ sur $43^{cm},4$ de côté. Il porte $186^{m},95$ du fil, formant cinq couches, de 16 spires chacune; sa surface totale est de

$$80 \times 3191 = 255280^{cm^2}.$$

5. *Comment peut-on appliquer la méthode précédente à un induit à anneau ou à tambour?*

Quand les spires ne sont pas réunies en un seul groupe, comme ci-dessus, mais qu'elles sont disposées symétriquement par rapport à un centre, et quand les connexions sont établies en deux points opposés du système des spires, la méthode peut encore être appliquée, mais le calcul demande à être rectifié.

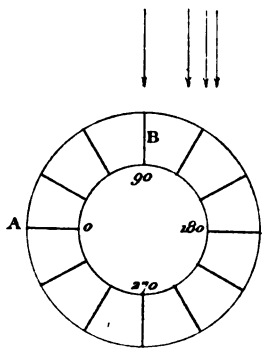
Et d'abord remarquons que la moitié seulement des spires est assemblée en série; la force électromotrice induite est donc moitié moindre qu'elle ne serait si toutes les spires étaient en série. Il faudra par suite doubler le résultat obtenu.

---

[1] Il convient fort bien à l'évaluation du champ rémanent d'une dynamo excitatrice.

Mais il y a une autre observation à faire; les spires font toutes, comme ci-dessus, une demi-révolution, mais elles ne partent pas toutes, comme A, d'une position normale à la composante verticale des lignes du champ terrestre qu'on utilise : mais la spire B, par exemple, part d'une direction parallèle et atteint une direction parallèle, sans donner de

Fig. 42.



courant induit efficace. L'action est donc proportionnelle à la valeur moyenne des sinus compris entre 0° et 180°, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à $\frac{2}{\pi}$; il faut donc multiplier le résultat obtenu par $\frac{\pi}{2}$, pour compenser cet effet.

En somme, il faut faire intervenir le facteur $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$.

Nous aurons par conséquent

$$\frac{S}{S'} = \pi \frac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta'}.$$

Cette méthode est due à M. Sylvanus Thompson.

6. *Étudier l'influence d'une élévation de température sur la perméabilité du noyau.*

On sait qu'un noyau dont la température est élevée possède une perméabilité magnétique moindre qu'à froid; l'armature

échauffée semble donc avoir des dimensions réduites; sa surface équivalente est plus petite qu'à froid.

Il convient dès lors de déterminer S par les procédés précédents en opérant sur une bobine dont la température soit égale à celle qu'elle atteint en travail.

Il est vrai que cette valeur de S ne sera encore pas exactement celle qui appartient réellement à l'armature tournant dans le champ, car les âmes de fer se saturent plus ou moins, sous l'action du flux, et leur effet multiplicateur diminue.

Ces considérations font ressortir le caractère artificiel des calculs qu'on peut effectuer pour déterminer les éléments d'une dynamo; on ne peut leur demander qu'une indication et non pas une solution exacte.

7. *Une armature d'induit avait à froid, soit à* 16°, *une résistance de* 0,265 *ohm; après une heure de travail, on la retire du champ et on lui trouve une résistance de* 0,289 *ohm; quelle est approximativement sa température moyenne?*

L'augmentation est de $\frac{289}{265} = 1,09$; or, d'après le tableau de Culley, nous voyons que du fil de cuivre, de teneur 95 pour 100, a une résistance de 0,1611 à 16° et de 0,1756 à 39°; c'est précisément le rapport cherché, car $\frac{1756}{1611} = 1,09$. La température moyenne de la bobine est donc de 39°.

En déterminant la résistance d'une armature d'induit, à âme de fer, il faut se tenir en garde contre les illusions produites par la self-induction de l'induit, qu'on compare à des boîtes de résistance sans self-induction. En opérant donc au pont de Wheatstone, on observera, non pas les premières impulsions, mais les déviations permanentes du galvanoscope.

8. *Une armature d'induit a une résistance statique r au repos; quelle est l'augmentation de résistance apparente qu'elle éprouve par self-induction quand l'induit est en mouvement?*

Excitons séparément le champ inducteur; pour n révolutions par minute, la génératrice donne, à circuit ouvert,

E volts entre ses bornes; sur une résistance R, elle ne donne plus que E′, à même vitesse.

On a donc

$$E - E' = I(R + r').$$

Si l'on mesure I par un ampèremètre, on aura

$$R + r = \frac{E - E'}{I}.$$

D'où r' et $r' - r$.

La différence entre r' et la résistance statique r est quelquefois fort grande : l'expérience montre qu'elle est à peu près indépendante de R.

9. *Mesurer le coefficient de self-induction d'un induit.*

Voici le procédé employé par nous et qui nous donne les meilleurs résultats.

Soit B l'armature d'induit dont il faut mesurer le coefficient L_s de self-induction.

On commence par déterminer sa résistance R.

Puis on introduit l'armature dans un circuit dérivé, en face d'une bobine A, à double enroulement sans self-induction, ayant exactement la même résistance R (*fig.* 43).

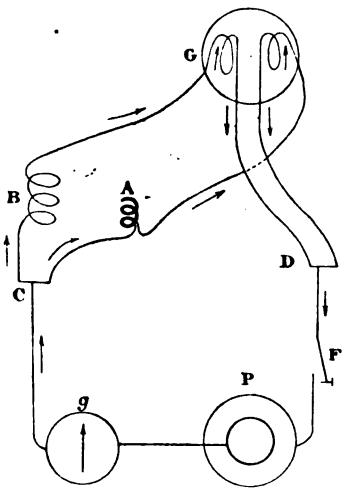
Ces deux circuits dérivés procèdent du circuit principal PC, renfermant une pile : ce circuit se bifurque en C. La première dérivation renferme l'armature B, l'autre la résistance A sans self-induction; elles traversent toutes deux, en sens contraire, le cadre d'un galvanomètre différentiel G, pouvant servir de balistique; le circuit se referme en D, par le conducteur DFP, renfermant en F une clef de rupture. On peut suivre sur la *fig.* 43 la marche des courants, qui est marquée par des flèches. Une boussole des tangentes *g* placée dans le circuit donne l'intensité I du courant principal.

Il faut commencer par ajuster les résistances des circuits dérivés, de manière à réduire à zéro leur action dans le galvanomètre différentiel : les deux courants dérivés sont alors égaux [1]. Cela fait, on rompt brusquement le circuit principal

[1] Il convient de s'assurer que l'équilibre réalisé de la sorte n'est pas rompu par l'élévation de température plus considérable de l'une ou de l'autre des bobines A ou B.

en agissant sur la clef F; la rupture détermine une force électromotrice de self-induction en B, et non pas en A, et il se produit un extra-courant unique dont l'intensité est fonction de L_s, et qui provoque une élongation δ de l'aiguille du galvanomètre G. On observe δ et l'on en déduit la quantité q

Fig. 43.



d'électricité mise en mouvement dans ce courant instantané; il faut pour cela évidemment qu'on ait déterminé à l'avance la constante du balistique.

Les calculs à faire sont les suivants : appelons E la force électromotrice de la pile et r sa résistance intérieure, I l'intensité du courant principal

$$\frac{I}{2} = \frac{ER}{R^2 + Rr + Rr} = \frac{E}{R + 2r}.$$

La quantité q d'électricité induite dans B est

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} q &= \frac{E}{R+r} \int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L_s}t}\, dt \\ &= \frac{E}{(R+2r)} \frac{L_s}{2R} = \frac{E}{2(R^2+2Rr)} L_s. \end{aligned} \right.$$

Mais

$$\frac{ER}{R^2 + 2Rr} = \frac{I}{2}.$$

Donc

$$q = L_s \frac{I}{4R} \quad \text{et} \quad L_s = \frac{4R}{I} q.$$

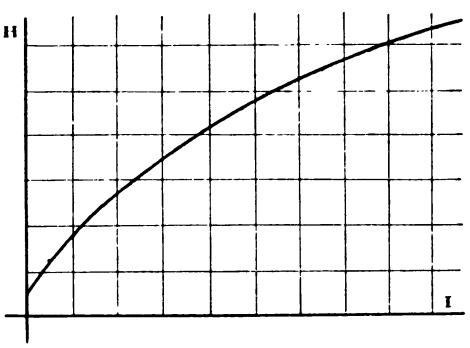
J'extrais quelques chiffres de mon carnet d'expériences.

$R = 0,68$ ohm $= 0,68 \times 10^9$ U.E.M.,
$I = 0,0325$ U.E.M.,
$\delta = 10°30'$,
$q = 0,06251 \sin\frac{\delta}{2}$,
$L_s = 0,477 \times 10^9$ centimètres $= 0,477$ quadrant.

10. *Étudier les variations du champ magnétique dans les divers régimes de marche d'une série dynamo.*

On sépare l'inducteur de l'induit et l'on excite le champ par le courant fourni soit par une batterie d'accumulateurs, soit par une machine magnéto spéciale ; on note les intensités des

Fig. 44.



courants employés à cet effet. En même temps, on relèvera les valeurs successives E de la différence de potentiel aux bornes.

Si H est l'intensité du champ, l la longueur des fils qui

coupent normalement les lignes de force à l'intérieur de l'induit (les fils intérieurs à l'armature ne doivent pas entrer en ligne de compte), v la vitesse périphérique de l'armature, on aura

$$E = Hlv.$$

Mais, si nous appelons d le diamètre moyen des spires et n le nombre de révolutions faites par seconde, nous voyons que

$$v = \pi dn.$$

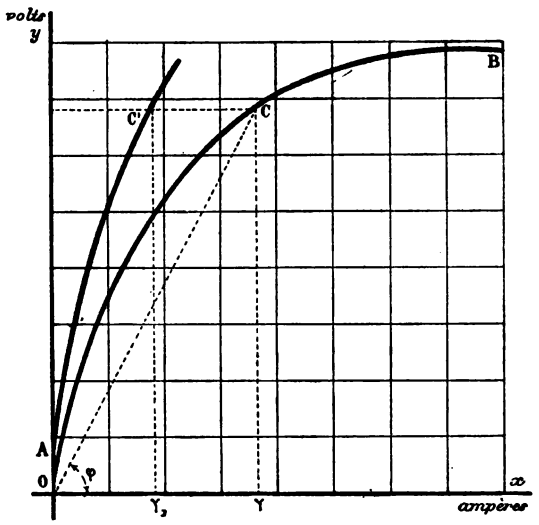
Donc

$$E = \pi l dn H.$$

On peut donc calculer H en fonction de E et l'on a les éléments de construction de la courbe des valeurs de H, rapportées aux intensités des courants excitateurs prises pour abscisses. Ces valeurs de I sont celles du courant fourni par la machine sur une résistance extérieure donnée.

11. *On a construit la caractéristique d'une série-dynamo en faisant varier la résistance extérieure* R *et en relevant les*

Fig. 45.



valeurs correspondantes des forces électromotrices entre les

bornes et des intensités du courant : les premières ayant été portées en ordonnées, les secondes en abscisses, on a obtenu la courbe AB (*fig.* 45). *On demande :*

1° *Quelle est la puissance* $\mathfrak{P}$ *correspondante au point* C?
2° *Quelle est, pour ce même point, la résistance extérieure* R?

On se rappellera d'abord qu'un watt est égal à $\frac{1}{736}$ du cheval-vapeur. On trouvera donc $\mathfrak{P}$ en calculant la valeur de

$$\frac{EI}{736} = \frac{O\gamma \times C\gamma}{736}.$$

On obtient par suite la puissance en chevaux en faisant le produit des coordonnées du point et en le divisant par 736.

D'autre part,

$$R = \frac{E}{I} = \frac{C\gamma}{O\gamma} = \tang\varphi.$$

Ainsi la tangente de l'angle formé avec l'axe des x par la droite qui joint l'origine au point considéré de la caractéristique donne la résistance R correspondante à ce point.

12. *Quelle eût été la force électromotrice au point* C (*fig.* 45) *si l'on avait doublé la vitesse de rotation de l'induit ou le nombre des spires de l'inducteur et de l'induit?*

En augmentant la vitesse, on augmente proportionnellement la force électromotrice, car

$$E = Hlv.$$

La force électromotrice s'obtiendra donc en doublant l'ordonnée $C\gamma$.

Qu'arrivera-t-il si nous doublons l'enroulement de l'inducteur? Le champ doublerait d'intensité, et par suite aussi E, si l'augmentation de résistance ne diminuait pas l'intensité du courant inducteur; or on peut conserver la même intensité en faisant varier convenablement la résistance extérieure. Une augmentation du nombre de spires de l'inducteur équivaut dans ce cas à une augmentation de vitesse, *aliis non mutatis*. Même raisonnement pour l'induit.

Mais supposons que le nouvel enroulement de l'inducteur fasse diminuer réellement l'intensité et que la nouvelle valeur I' soit égale à $I\frac{n}{n'}$, n' étant le nombre plus considérable de tours de fil. Le champ sera resté aussi intense, quoiqu'il y ait moins d'ampères dans le circuit inducteur; nous aurons, par suite, pour un enroulement double, une intensité moindre $O\gamma_1 = \frac{1}{2}O\gamma$ et une force électromotrice $\gamma'_1 C''$ égale à γC. On construira facilement la nouvelle caractéristique en réduisant les abscisses dans le rapport inverse du nombre de tours.

13. *La résistance de l'induit d'une shunt-dynamo est r, celle de l'inducteur r'; R est la résistance extérieure. On demande de trouver le rapport qui existe entre* E, *la force électromotrice totale, et e, la force électromotrice entre les bornes, au point où le conducteur dérivé est greffé sur le circuit principal.*

Appelons i, i' et I les courants de l'induit, de l'inducteur et du circuit extérieur :

$$i = I + i', \qquad I = \frac{e}{R}, \qquad i' = \frac{e}{r};$$

d'où

$$i = e\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r'}\right) = \frac{E}{r + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r'}}},$$

En réduisant, nous trouvons

$$\frac{e}{E} = \frac{Rr'}{rr' + Rr + Rr'}.$$

14. *Un moteur à gaz, développant deux chevaux effectifs, actionne une dynamo-compound, entre les bornes de laquelle on mesure* 50,6 *volts; en même temps, des galvanomètres Deprez et d'Arsonval, convenablement shuntés, donnaient les intensités suivantes des courants :*

Dans l'armature d'induit, $i_1 = 21,96$ *ampères;*

Dans les inducteurs dérivés, $i_s = 1,69$ *ampère;*

Dans le circuit extérieur, $I = 20,27$ *ampères.*

La résistance de l'induit est $r_i = 0,065$ *ohm; celle de l'enroulement en série est* $r_s = 0,058$ *ohm; ces résistances ont été mesurées à chaud.*

Quels sont les rendements électrique et industriel de cette machine?

La force électromotrice totale E est facile à calculer, parce que nous connaissons la force électromotrice entre les bornes e et que nous pouvons évaluer les pertes subies dans la machine.

$$\begin{aligned} E &= e + (i_s + I)(r_i + r_s) \\ &= 50,6 + (20,27 + 1,69)(0,065 + 0,058) \\ &= 50,6 + 21,96 \times 0,123 = 52,70 \text{ volts.} \end{aligned}$$

Le rendement électrique sera donné par le quotient

$$\frac{eI}{Ei_i} = \frac{50,6 \times 20,27}{52,7 \times 21,96} = \frac{1025,66}{1157,29} = 0,88;$$

le rendement industriel est égal au quotient des watts disponibles par les watts dépensés à l'excitation, ce qui donne

$$\frac{eI}{2 \times 736} = \frac{1025,66}{1472} = 0,69.$$

15. *Une dynamo, marchant à vide, à des vitesses de* 800 *et de* 1200 *tours par minute, absorbe dans le premier cas* 190^{kgm} *et dans le deuxième* 127^{kgm}, *mesurés à l'aide d'un dynamomètre de rotation. On recommence le même essai aux mêmes vitesses, balais relevés et inducteurs excités séparément à l'intensité de la marche normale : on trouve* 512^{kgm} *et* 319^{kgm}. *Déduire de cette épreuve les coefficients des pertes d'énergie par tour dues aux courants de Foucault et à l'hystérésis.*

La puissance relevée en second lieu correspond aux frottements, aux courants parasites et aux effets d'hystérésis; celle qui s'est trouvée absorbée dans le premier essai ne correspond qu'aux frottements; par différence, on élimine donc cette perte. Appelons $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ les différences constatées à 800 et à 1200 tours.

On sait que la puissance perdue du chef des courants parasites des noyaux et des conducteurs entourant les noyaux est proportionnelle au carré du nombre des révolutions, tandis que les pertes par les actions magnétiques sont proportionnelles au nombre des révolutions.

Nous avons donc

$$\mathfrak{P} = \alpha n^2 + \beta n,$$
$$\mathfrak{P}' = \alpha n'^2 + \beta n';$$

d'où

$$\alpha = \frac{\mathfrak{P}' n - \mathfrak{P} n'}{n n'^2 - n' n^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\mathfrak{P}' n^2 - \mathfrak{P} n'^2}{n^2 n' - n'^2 n}.$$

On obtient

$$\alpha = 0,00007 \quad \text{et} \quad \beta = 0,183.$$

Ces coefficients indiquent la perte d'énergie subie par tour.

Par minute les courants de Foucault absorbent donc, à 1200 tours, $100^{kgm},8$, les effets d'hystérésis 219,6 et les frottements 191,4.

Cette méthode est due à M. Mordey.

CHAPITRE XX.

ÉLECTRO-MOTEURS.

1. *Un moteur Reckenzaun a développé une puissance mécanique de* 1,36 *cheval, quand il recevait un courant de* 75 *ampères, la différence de potentiel entre ses bornes étant de* 25 *volts. Quel a été le rendement de ce moteur?*

Le travail électrique absorbé est de

$$\frac{25 \times 75}{730} = 2,54 \text{ chevaux.}$$

Le rendement n'est donc égal qu'à $\frac{1,36}{2,54} = 0,49$.

2. *Une machine Siemens, employée comme moteur, a fait* 900 *tours, quand elle était chargée de* $0^{kg},240$ *net par un frein dont le bras du levier avait une longueur de* $0^{m},63$: *à ce moment elle recevait* 6 *ampères par* 28 *volts. Quel rendement industriel donnait cette machine?*

Le travail mécanique développé au frein a été de

$$\frac{2\pi l n P}{60 \times 75} = \frac{2\pi \times 0,63 \times 900 \times 0,24}{4500} = 0,189 \text{ cheval;}$$

en même temps, le travail électrique disponible était de

$$6 \times 28 = 1680 \text{ watts} = \frac{1680}{736} = 0,228 \text{ cheval,}$$

ce qui porte le rendement à $\frac{189}{228} = 0,82$.

3. *Une dynamo réceptrice recevait un courant de* 7,3 *ampères, fourni par une génératrice donnant* 111 *volts entre ses bornes : la résistance de la canalisation était de* 4,8 *ohms. Calculer d'après cela la force contre-électromotrice développée par la réceptrice.*

Il est aisé de calculer la force électromotrice effective, qui était égale à

$$7,3 \times 4,8 = 35 \text{ volts.}$$

La force contre-électromotrice était donc égale à

$$111 - 35 = 76 \text{ volts.}$$

4. *A quelle condition aura-t-on même rendement pour une dynamo fonctionnant comme génératrice ou comme réceptrice ?*

Prenons deux machines identiques dont l'une fera tourner l'autre; la force électromotrice développée dans l'induit sera la même dans les deux machines, si leur vitesse est la même. Appelons E cette force électromotrice, R la résistance des machines et a l'ensemble des pertes dues aux frottements, aux courants parasites de Foucault et à l'hystérésis. Le rendement industriel de la génératrice sera

$$\frac{EI - I^2R}{EI + a},$$

celui de la réceptrice aura pour expression

$$\frac{EI - a}{EI + I^2R}.$$

Pour comparer ces deux valeurs, écrivons-les de la manière suivante :

$$\frac{(EI)^2 - (I^2R)^2}{(EI + a)(EI + I^2R)} \quad \text{et} \quad \frac{(EI)^2 - (a)^2}{(EI + I^2R)(EI + a)}.$$

On voit bien ainsi qu'il faut, pour l'égalité des rendements industriels, que

$$IR = a.$$

Le plus souvent a est inférieur à I^2R; c'est ce qui explique que les réceptrices ont généralement un rendement plus élevé que les génératrices. Le calcul précédent est de M. Éric Gérard.

5. *Deux dynamos identiques ont leurs axes accouplés par un manchon; la première est alimentée par une batterie d'accumulateurs et elle actionne l'autre, dont le courant est lancé dans une résistance; on recueille* 1260 *watts aux bornes de la première.* 1206 *watts aux bornes de la seconde. Quel est le rapport des rendements de la réceptrice et de la génératrice?*

Le rapport des rendements est égal à

$$\frac{1206}{1260} = 0,95.$$

6. *Un moteur est construit pour une différence de potentiel de* 500 *volts entre ses bornes; sa résistance intérieure r est de* 0,82 *ohm. Quelle devra être l'intensité du courant pour que le travail développé soit maximum et quel sera alors le rendement du moteur?*

L'énergie absorbée est EI; la perte dans l'inducteur et l'induit est I^2r; le travail utile a donc pour expression

$$(EI - I^2r) = (E - Ir)I.$$

Cette quantité est maximum pour

$$I = \frac{1}{2}\frac{E}{r} = 304 \text{ ampères.}$$

Mais le rendement est faible dans ces conditions : le travail développé est égal en effet à

$$\left(E - \frac{E}{2}\right)\frac{E}{2r} = \frac{E^2}{4r}$$

et le rendement devient

$$\frac{\frac{E^2}{4r}}{\frac{E^2}{2r}} = \frac{1}{2}, \text{ soit 50 pour 100.}$$

Avec 49 ampères, on aurait eu au contraire un rendement de 90 pour 100, en produisant 30 chevaux au frein.

7. *Un amateur veut construire un moteur en série, développant un quart de cheval effectif à la vitesse de* 1500 *tours par minute, avec une différence de potentiel de* 100 *volts entre les bornes : l'induit sera constitué par une armature en tambour, genre Siemens; l'inducteur sera formé d'une culasse et de deux noyaux cylindriques en fer, dont le prolongement constituera les pièces polaires. Calculer les dimensions à donner à ce moteur?*

Une puissance d'un quart de cheval équivaut à

$$\frac{736}{4} = 184 \text{ watts};$$

en prévision d'une perte de 35 pour 100, on les portera à 250 watts.

Pour 100 volts entre les bornes, il faudra donc un courant de 2,5 ampères.

Enroulons sur le tambour de l'armature 1000 spires et acceptons pour le fil un diamètre de $0^{cm},08$. On prendra un tambour de fer de 8^{cm} de diamètre extérieur, $1^{cm},2$ d'épaisseur et 10^{cm} de longueur suivant l'axe. La section double de l'anneau sera, en tenant compte de l'isolant des tôles, égale à $2 \times 1 \times 10 = 20^{cm^2}$.

Estimons *a priori* à 8 volts la perte dans les inducteurs et à 17 volts celle qui se produit dans l'induit; la force contre-électromotrice de l'induit sera, par suite, de

$$100 - (8 + 17) = 75 \text{ volts},$$

et le flux nécessaire sera donné par la formule connue

$$\varphi = \frac{60}{2n} \frac{E \times 10^8}{N} = \frac{30}{1500} \frac{75 \times 10^8}{1000} = 150000.$$

Le champ devra avoir une intensité

$$H = \frac{\varphi}{S} = \frac{150000}{10 \times 8} = 1875 \text{ C.G.S.},$$

si les têtes polaires ont une surface développée de 80^{cm^2}, ce qui est facile à obtenir.

L'induction magnétique dans l'induit sera

$$\mathfrak{B} = \frac{150000}{20} = 7500 \text{ C.G.S.}$$

La perte de flux pouvant atteindre $\frac{1}{3}$, nous calculerons les sections de l'inducteur par la formule

$$\frac{150000 \times 1,30}{10000} = 19^{cm^2},5.$$

La culasse aura, par exemple, $2^{cm},4$ sur 8^{cm} et le noyau de l'électro un diamètre de 5^{cm}.

L'entrefer peut être évalué à $0^{cm},16$ pour deux couches de fil et à $0^{cm},14$ pour la ligature et le jeu, soit en tout à $0^{cm},3$.

Donnons à l'électro, culasse y comprise, 30^{cm}; l'induit a environ 8^{cm} de longueur pour les lignes de force.

Il vient donc

$$NI = \frac{10}{4\pi} \sum \frac{\varphi}{\mu S} l = \frac{10}{4\pi} \Sigma H l$$
$$= \frac{1}{1,25}(1750 \times 0,6 + 8 \times 8 + 30 \times 5) = 1214 \text{ ampères-tours.}$$

Prenons 1400 pour tenir compte de la réaction de l'induit.

Il y aura $\frac{1400}{2,5} = 560$ spires, soit 280 par branche d'électro.

On prendra un fil de $0^{cm},13$ de diamètre, enroulé sur trois couches.

CHAPITRE XXI.

CANALISATIONS.

1. *Calculer l'excès de température que prend un conducteur en cuivre, traversé par un courant de* 30 *ampères, la densité de ce courant étant de* 2 *ampères par millimètre carré? Ce fil est recouvert, placé sous moulures, et le coefficient de déperdition extérieure* H *ne dépasse pas* 0,0001 *par centimètre carré et par seconde en calories-grammes.*

Pour 30 ampères, au taux de 2 ampères par millimètre carré, le conducteur aura un diamètre de $0^{cm},44$.

La résistance du mètre de longueur de ce fil sera de

$$\frac{\alpha l}{s} = \frac{1,584 \times 10^3 \times 100}{0,15} = \frac{1,584 \times 10^5}{0,15} = 10,5 \times 10^5 \text{ U.E.M.}$$

$$= \frac{10,5 \times 10^5}{10^9} = 0,00105 \text{ ohm.}$$

La quantité de chaleur dégagée dans le temps t sera AI^2Rt et égale à la chaleur perdue $\pi dl H \varepsilon t$, et l'on a, pour la valeur ε de l'excès de température cherché,

$$\varepsilon = \frac{AI^2R}{\pi dlH}$$

$$= \frac{\overline{3}^2 \times 10,5 \times 10^5}{4,16 \times 10^7 \times \pi \times 0,44 \times 100 \times 0,0001}$$

$$= 17^\circ.$$

Le coefficient H est rapporté au centimètre carré et exprimé en calories-grammes; cela veut dire que la chaleur perdue par seconde et par centimètre carré, pour un excès de 1°, est égale

à $\frac{1}{10000}$ de calorie-gramme. L'élévation de température calculée n'a aucun inconvénient et ne présente aucun danger; le calcul concorde donc bien avec la pratique, qui prescrit cette densité de courant égale à 2.

Toutefois, pour un diamètre de 1^{cm}, il serait sage de ne pas dépasser une densité de 1,75.

2. *Un branchement en cuivre renferme* 30 *lampes à incandescence, placées en dérivation, consommant chacune* 0,75 *ampère; il a* 100^{m} *de longueur et les lampes sont uniformément réparties. On limite à* ± 1 *volt l'écart maximum de voltage de la première lampe à la dernière. Quelle sera la section du branchement?*

L'intensité I du courant est connue :

$$I = 30 \times 0,75 = 22,5 \text{ ampères.}$$

La longueur $l = 100^{m} = 10000^{cm}$.

Le plus grand écart de voltage se produira entre la première et la dernière lampe; les volts décroissent du commencement à l'extrémité de la ligne suivant une courbe parabolique; le maximum d'écart est de 2 volts.

On aura, en U.E.M.,

$$2 \times 10^{8} = \frac{I}{10} R = \frac{I}{10} \alpha \frac{l}{S},$$

d'où

$$\begin{aligned} S &= \frac{I \alpha l}{2 \times 10^{9}} \\ &= \frac{22,5 \times 1,584 \times 10^{3} \times 10^{4}}{2 \times 10^{9}} \\ &= 0,1782^{cm^2} \\ &= 17,82^{mm^2}. \end{aligned}$$

Le fil aura un diamètre de $0^{cm},47 = 4^{mm},7$.

La densité du courant sera égale à

$$\frac{22,5}{17,8} = 1,3.$$

3. *Un fil conducteur, recouvert de gutta-percha, est plongé dans une cuve d'eau acidulée, l'un des bouts étant isolé et l'autre relié à la paroi de la cuve par l'intermédiaire d'un galvanomètre et d'une pile : dans ces conditions, l'intensité du courant est de* 150 *milliampères. Ce même galvanomètre, shunté au* $\frac{1}{1000}$, *indique un courant de* 630 *milliampères, quand le courant est lancé dans une résistance* $R = 20$ *ohms. Quelle est la résistance* x *de l'enveloppe isolante du fil?*

On voit sans peine que

$$E = 1000 I_2 \left(r + \frac{G}{1000} + R\right) = I_1 (r + G + x).$$

En négligeant la résistance intérieure r de la pile et celle du galvanomètre, nous aurons

$$1000 \frac{I_2}{I_1} = \frac{1000(G + x)}{G + 1000 R}$$

et enfin

$$x = 1000 R \frac{I_2}{I_1} = 84000 \text{ ohms}.$$

4. *Une ligne télégraphique de* 850^{km} *de longueur, étant intercalée dans le circuit d'une pile* $P(E, r)$ *et d'un galvanomètre* G, *avec retour par la terre, est traversée par un courant d'intensité* $I = 60$ *milliampères; le circuit étant fermé par un conducteur de* 1000 *ohms, l'intensité devient égale à* $I_1 = 36$ *milliampères. Quelle est la résistance d'isolement kilométrique du câble?*

$$I = \frac{E}{R + r + G},$$

$$I_1 = \frac{E}{1000 + r + G};$$

$$R = \frac{I_1}{I}(1000 + r + G) - r + G = \frac{I_1}{I} 1000 = 600 \text{ ohms}.$$

L'isolement par kilomètre est donc 850 fois plus grand, soit

$$850 \times 600 = 510000 \text{ ohms}.$$

5. *Un câble de* 100^{km} *a une résistance de* 15,2 *ohms par*

kilomètre; un accident étant survenu, on lui trouve une résistance totale $R_1 = 1152$ *ohms, quand son extrémité éloignée est isolée, et une résistance* $R_2 = 918$ *ohms, quand cette extrémite est reliée au sol. A quelle distance du lieu d'essai se trouve le défaut?*

Soient x la résistance de la portion de ligne comprise entre l'origine et le point défectueux, y la résistance de l'autre portion, ρ la résistance du défaut, R la résistance totale de la ligne.

$$R = x + y.$$

Dans la première épreuve, on a

$$x + \rho = R_1$$

et, par suite,

$$\rho = R_1 - x.$$

La seconde épreuve fournit cette autre relation

$$x + \frac{\rho y}{\rho + y} = R_2,$$

d'où

$$x + \frac{(R_1 - x)(R - x)}{R_1 + R - 2x} = R_2,$$

ou enfin

$$x^2 - 2xR_2 - R(R_1 - R_2) + R_1 R_2 = 0.$$

Cette équation donne

$$x = R_2 \pm \sqrt{(R_1 - R_2)(R - R_2)}.$$

La valeur négative du radical répond seule au problème, puisque x doit être plus petit que R_2 : tous calculs faits, on trouve

$$x = 494,6 \text{ ohms}.$$

La distance du défaut est, par suite, de

$$\frac{496,6}{15,2} = 32671^{m}.$$

6. *Un câble de* 1000^{km} *est soupçonné d'un défaut : pour*

s'en assurer et trouver la place du défaut, on soumet le câble aux deux épreuves suivantes. D'abord, on le met en communication par un bout avec une source donnant 500 *volts, l'autre bout étant isolé; puis on intervertit les attaches. Dans la première expérience, les potentiels étaient* 500 *et* 120*; dans la seconde, il a fallu élever le potentiel de la source à* 580 *volts pour conserver* 120 *volts à l'autre extrémité. Le câble est-il défectueux? Dans ce cas, où est le défaut?*

Le manque de symétrie des potentiels est la preuve manifeste d'un défaut.

Ce défaut n'est pas au milieu du câble, sinon les chutes de potentiel n'eussent pas changé dans le retournement.

On peut admettre que ces chutes sont proportionnelles aux distances qui séparent le point défectueux de l'origine dans chaque cas [1].

Appelons donc l la longueur du conducteur et x la distance du défaut à partir d'une extrémité, nous aurons

$$\frac{x}{l-x} = \frac{500-120}{580-120} = \frac{380}{460} = \frac{19}{23}.$$

Il vient dès lors

$$\begin{aligned} 23x &= 19(l-x), \\ 42x &= 19l, \\ x &= \frac{19}{42}l \\ &= 452^{\text{km}},3. \end{aligned}$$

7. *Comment peut-on rechercher un défaut par le téléphone?*

M. Éric Gérard indique le moyen suivant : le conducteur est relié par une extrémité à la terre; l'autre extrémité est mise en communication avec un pôle de pile, l'autre pôle étant à la terre. Qu'on intercale dans le circuit un trembleur quelconque et qu'on promène alors, le long du conducteur,

---

[1] Cela revient à admettre que le potentiel au point défectueux est exactement le même que le potentiel à l'extrémité isolée : l'hypothèse n'est pas toujours exacte, mais elle conduit le plus souvent à de bons résultats.

une bobine à noyau de fer doux, recouverte de fil fin et reliée à un téléphone : le noyau de fer sera maintenu normal au fil. On entendra, au téléphone, l'interruption du courant; mais le bruit cessera ou diminuera à la rencontre du défaut.

8. *Pour essayer une canalisation, M. Picou prend successivement une prise de terre sur chaque fil par l'intermédiaire d'un voltmètre ayant une résistance connue r. Pour un point, on relève e' volts; le point correspondant du second fil donne e''; la distribution se fait sous la différence de potentiel* E. *Quelle est la résistance totale d'isolement* R?

Dans le premier essai, on avait un courant de fuite à la terre égal à

$$I' = \frac{e'}{r} = \frac{V}{R + r}.$$

Si nous appelons V le potentiel du point touché, sur l'autre fil, nous aurons

$$I = \frac{e''}{r} = \frac{-V'}{R + r}.$$

Mais $V - V' = E$.

Donc, par addition,

$$\frac{V - V'}{R + r} = \frac{E}{R + r} = \frac{e' + e''}{r}$$

et

$$R = r\,\frac{E - (e' + e'')}{(e' + e'')}.$$

9. *Calculer la capacité d'une ligne aérienne, suspendue à une distance* D *du sol, ayant un rayon r et une longueur l.*

La capacité C de deux cylindres de rayons R et r concentriques est égale à

$$(14) \qquad C = \frac{l}{2\log'\frac{R}{r}} = \frac{l}{2\log'\left(1 + \frac{D}{r}\right)},$$

car $R = r + D$.

Comme D est fort grand par rapport à r, on écrit souvent

$$C = \frac{l}{2\log' \frac{D}{r}}.$$

10. *Démontrer que dans un conducteur l'augmentation de capacité produit une diminution de self-induction.*

Soit un circuit de résistance R et de capacité C; la charge nécessaire pour le porter au potentiel V est

$$q = CV = CIR.$$

Cette charge s'ajoute à l'électricité qui traverse le circuit à la fin de la période variable et la résistance semble diminuer.

La self-induction produit au contraire un accroissement apparent de résistance : le flux diminue et la quantité induite devient q';

$$q' = L_s \frac{I}{R}.$$

La différence est

$$q' - q = L_s \frac{I}{R} - CIR = \frac{I}{R}(L_s - CR^2).$$

L'effet de la condensation dans le câble correspond à une diminution de self-induction égale au produit CR^2.

11. *Un condensateur de $\frac{1}{10}$ de microfarad, chargé à un potentiel déterminé, donne par décharge dans un galvanomètre 35° de déviation; on le recharge dans les mêmes conditions et on le met en communication par un fil long et fin avec un câble de capacité inconnue x; après quoi, on l'isole et on le décharge de nouveau à travers le galvanomètre. La déviation n'est plus que de 28°. Quelle est la capacité du câble?*

Quand on fait communiquer deux condensateurs A et B, l'un chargé, l'autre à l'état neutre, la charge du premier se distribue entre les deux proportionnellement à leurs capacités : soient Q la charge de A et C sa capacité; le second

prend une quantité q, et l'on a

$$\frac{Q-q}{q}=\frac{C}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{q}=\frac{C+x}{x}.$$

Nous en déduisons, en nous rappelant que les déviations produites par la décharge dans un galvanomètre sont proportionnelles aux charges,

$$\frac{Q-q}{Q}=\frac{28}{35}=\frac{C}{C+x}$$

et

$$x=\frac{C(35-28)}{28}=\frac{1}{10}\times\frac{7}{28}=\frac{1}{40} \text{ de microfarad.}$$

12. *Un condensateur de* 1 *microfarad est mis* 10 *fois de suite en communication avec un câble, élevé primitivement au potentiel* E, *et il est déchargé autant de fois; on note la dernière fois une déviation de* 42 *divisions dans un galvanomètre traversé par le courant de décharge. Ce même condensateur, chargé directement au même potentiel* E, *donnerait d'ailleurs une déviation de* 75 *divisions dans ce galvanomètre. Déduire de ces expériences la capacité* x *du câble.*

A chaque contact, le condensateur emporte une partie de la charge du câble; mais la quantité soustraite décroît à chaque opération; toutefois, le partage se fait toujours proportionnellement aux capacités. Soient Q_1 la charge primitive du câble, C et x les capacités du condensateur et du câble; le condensateur prend la première fois $Q_1\frac{C}{C+x}$, et le câble garde $Q_1\frac{x}{C+x}$; à la seconde opération, le condensateur emporte

$$\left(Q_1\frac{x}{C+x}\right)\frac{C}{C+x}=Q_1\frac{Cx}{(C+x)^2}.$$

Or le condensateur, élevé au même potentiel que le câble, posséderait une quantité Q_2 égale à $Q_1\frac{C}{x}$; donc $Q_1=Q_2\frac{x}{C}$,

et la quantité emportée peut être représentée par

$$Q_2\left(\frac{x}{C+x}\right)^2.$$

A la $n^{\text{ième}}$ opération, le condensateur a pris

$$Q = Q_2\left(\frac{x}{C+x}\right)^n.$$

Mais Q est connu par la déviation de décharge; par conséquent, nous pouvons résoudre cette équation pour en tirer x :

$$x = C\frac{\sqrt[n]{Q}}{\sqrt[n]{Q_2}-\sqrt[n]{Q}} = \frac{C}{\left(\frac{Q_2}{Q}\right)^{\frac{1}{n}}-1}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{75}{42}\right)^{\frac{1}{10}}-1} = \frac{1}{1,059-1} = 16,95 \text{ microfarads.}$$

13. *Un condensateur de* 100 *microfarads de capacité est déchargé dans un fil de résistance* R = 50 *ohms; quel est le temps nécessaire pour que le potentiel baisse de moitié dans ce condensateur?*

$$-dQ = -C\,dV = I\,dt = \frac{V}{R}\,dt,$$

en admettant que l'écoulement soit uniforme dans l'intervalle de temps infiniment petit dt; il vient donc

$$\int^{t_1} dt = CR\int_{V_0}^{V_1} -\frac{dV}{V},$$

$$t = CR\log'\frac{V_0}{V_1} = CR\log' 2$$

$$= 100\times 50\times 10^{-6}\times \log' 2$$

$$= 3,5\times 10^{-3} \text{ secondes.}$$

C'est environ $\frac{1}{285}$ de seconde.

14. *Un câble est à un potentiel* V; *on constate qu'au bout*

d'un temps t', il est tombé à un potentiel V', par suite de ses déperditions : au bout de quel temps t'' le potentiel sera-t-il devenu $\frac{V}{2}$?

Un câble chargé perd des fractions égales n de sa charge, dans des intervalles de temps égaux. Le potentiel ayant donc subi une chute de $\frac{V}{n}$ au bout de la première seconde a pris une valeur $V_1 = V - \frac{V}{n}$; on en déduit n,

$$n = \frac{V}{V - V_1};$$

à la fin de la deuxième seconde, le potentiel sera

$$V_2 = V_1 - \frac{V_1}{n} = V_1 - V_1\left(\frac{V - V_1}{V}\right) = \frac{V_1^2}{V} = V\left(\frac{V_1}{V}\right)^2.$$

Au bout des temps t' et t'', il sera

$$V' = V\left(\frac{V_1}{V}\right)^{t'},$$

$$V'' = V\left(\frac{V_1}{V}\right)^{t''}$$

et

$$t' = \frac{\log\frac{V'}{V}}{\log\frac{V_1}{V}}, \qquad t'' = \frac{\log\frac{V''}{V}}{\log\frac{V_1}{V}};$$

d'où

$$t'' = t'\frac{\log\frac{V''}{V}}{\log\frac{V'}{V}} = t'\frac{\log 2}{\log\frac{V'}{V}}.$$

15. *Un câble, déchargé à travers un balistique immédiatement après sa charge, donne une déviation δ_0; si l'on avait attendu une heure, la déviation n'aurait plus eu qu'une*

valeur δ_1. Sa capacité est d'ailleurs égale à C. *Quelle est sa résistance d'isolement?*

Nous avons vu ci-dessus que

$$t = \mathrm{CR} \log' \frac{\mathrm{V}_0}{\mathrm{V}_1}.$$

Or R est précisément la résistance cherchée, à travers laquelle le câble se décharge spontanément; d'autre part, les déviations δ_0 et δ_1 sont proportionnelles aux potentiels V_0 et V_1.

Nous avons donc

$$\mathrm{R} = \frac{t}{\mathrm{C} \log' \frac{\mathrm{V}_0}{\mathrm{V}_1}} = \frac{3600}{\mathrm{C} \log' \frac{\delta_0}{\delta_1}} = \frac{3600}{\mathrm{C}(\log' \delta_0 - \log' \delta_1)}$$
$$= \frac{3600}{\mathrm{C} \times 2{,}3026(\log \delta_0 - \log \delta_1)}.$$

R sera exprimé en mégohms si l'on évalue C en microfarads.

16. *Une ligne de* 10^{km} *de longueur est portée par* 130 *poteaux : on se propose de déterminer la résistance moyenne d'isolement x par poteau. A cet effet, on isole une extrémité de la ligne et on relie l'autre extrémité au pôle d'une pile de* 100 *éléments Callaud : on observe une déviation de* 18°, *par un galvanomètre Thomson ayant* 4000 *ohms de résistance. Or un élément Callaud de* 4 *ohms de résistance intérieure donne au même galvanomètre shunté au* $\frac{1}{100}$ *une déviation de* 5° *dans un circuit comprenant un rhéostat de* 10000 *ohms. Calculer x sur ces données expérimentales.*

La seconde expérience a pour objet de rechercher le nombre de mérite du galvanomètre employé (*voir* p. 161), c'est-à-dire de déterminer la résistance du circuit qui donne l'unité de déviation avec l'élément Callaud employé : soit y ce nombre de mérite.

$$y = 5 \times 100\left(10000 + \frac{4000}{100} + 4\right) = 5022000 \text{ ohms}$$
$$= 5 \text{ mégohms}.$$

La résistance d'isolement de la ligne sera donnée par la

relation

$$R = \frac{5022000 \times 100}{18} = 27,9 \text{ mégohms.}$$

La résistance x d'isolement par poteau sera de

$$27,9 \times 130 = 3627 \text{ mégohms.}$$

Dans ce calcul, nous avons admis que 100 éléments Callaud avaient une force électromotrice 100 fois plus grande que celle du seul élément employé, ce qui ne se vérifie presque jamais.

17. *Il se produit au milieu d'une conduite, ayant* 100 *ohms de résistance, une terre partielle dont on voudrait pouvoir apprécier la résistance approximative x. Or la conduite est alimentée par une source de* 100 *volts, ayant* 5,6 *ohms de résistance; elle débite un courant de* 53 *ampères. Déduire x de cette observation.*

Avant le défaut, le conducteur a, y compris la source, $5,6 + 50 = 56,50$ ohms de résistance.

A la terre partielle, se produit une dérivation à deux branches, dont la première a une résistance de 50 ohms, la seconde ayant la résistance x cherchée. La résistance de la bifurcation est de

$$\frac{50x}{50 + x}.$$

La résistance totale de la ligne est donc égale à

$$R = 56,50 + \frac{50x}{50 + x} \text{ ohms.}$$

Mais $R = EI = 100 \times 53 = 5300$.

Il vient donc

$$5300 = 56,5 \times 50 + (56,50 + 50)x,$$
$$x = 23 \text{ ohms environ.}$$

C'est par l'observation du débit de la source que l'on procède aux essais quotidiens qui permettent de vérifier, grossièrement il est vrai, mais fort rapidement, l'état des lignes.

CHAPITRE XXII.

TRANSPORT DE L'ÉNERGIE A DISTANCE.

1. *Combien faut-il dépenser d'énergie pour faire circuler un courant de* 100 *ampères dans un conducteur en cuivre de* 1000^{m} *de longueur et de* $0^{cm},5$ *de diamètre?*

L'électricité est un transmetteur d'énergie dont les services ne sont pas gratuits, ainsi que nous pourrons en juger par l'exemple proposé.

La résistance de 1^{km} de fil de cuivre de $0^{cm},5$ de diamètre est, d'après nos Tables, égale à 0,8 ohm; l'énergie absorbée est donc

$$W = \overline{100}^{2} \times 0,8 = 8000 \text{ watts} = \frac{8000}{9,81} = 815^{kgm}.$$

2. *On veut transporter à* 100^{km} *de distance une force de* 100 *chevaux avec une perte d'au plus* 20 *pour* 100; *calculer la résistance du conducteur d'après ces données, en négligeant la résistance de la source, dont la force électromotrice sera supposée de* 500 *volts.*

$$\mathfrak{C} = \frac{EI}{9,81},$$

$$I = \frac{9,81 \times \mathfrak{C}}{E} = \frac{9,81 \times 7500}{500} = 147,15 \text{ ampères.}$$

La perte étant limitée à 20 pour 100 ne pourra dépasser 20 chevaux, soit 1500^{kg} par seconde; il faut donc que

$$W = 1500 = \frac{I^2 R}{9,81},$$

d'où

$$R = \frac{1500 \times 9,81}{\overline{147,15}^2} = 0,68 \text{ ohm.}$$

La résistance kilométrique sera, par suite, égale à

$$0,0068 \text{ ohm} = 6800 \text{ microhms.}$$

Le conducteur aurait 28^{cm^2} de section.

En doublant les volts, on réduirait l'intensité du courant à 73,57 ampères et la résistance pourrait atteindre 2,72 ohms. L'avantage des hauts potentiels est évident.

3. *Il s'agit de transporter une puissance de* 100 *chevaux à* 500^m *de distance : la génératrice, identique à la réceptrice, a une force électromotrice de* 2000 *volts et une résistance intérieure r égale à* 12 *ohms. Calculer les éléments de cette transmission dans les conditions les plus avantageuses.*

Il faut transmettre 7500 kilogrammètres par seconde; or

$$\mathfrak{E} = \frac{EI}{9,81}$$

et

$$I = \frac{\mathfrak{E} \times 9,81}{E} = \frac{7500 \times 9,81}{2000} = 36,79 \text{ ampères.}$$

L'intensité du courant étant connue, on peut calculer la perte qui se produit dans la génératrice elle-même par échauffement; elle est égale à $\frac{I^2 r}{9,81}$ ou $\frac{\overline{36,79}^2 \times 12}{9,81} = 1654^{kgm}$. Estimons 1800^{kgm} la perte totale, en évaluant à 150^{kgm} le déchet dû aux frottements et aux autres résistances passives. Le travail transmis tombe à 5700^{kgm}; la différence de potentiel e entre les bornes sera donc de

$$\frac{5700 \times 9,81}{I} = 1520 \text{ volts.}$$

La réceptrice absorbera encore 1654^{kgm}, que nous porterons à 1750 [1]; il reste donc 3950^{kgm} disponibles.

Le conducteur produit un nouveau déchet, que l'on peut atténuer, il est vrai, à volonté; mais supposons que l'on emploie un conducteur de fer de 4^{mm} de diamètre semblable aux fils télégraphiques français.

La résistance de ce fil est de 9 ohms par kilomètre; la perte par échauffement atteint

$$\frac{RI^2}{9,81} = \frac{9 \times 0,5 \times 2 \times \overline{36,79}^2}{9,81} = 1241^{kgm}.$$

Somme toute, il reste $3950 - 1241 = 2709^{kgm}$, soit 36,1 chevaux.

Le rendement est de 36 pour 100 : il est médiocre.

On l'améliorerait en employant un conducteur de cuivre de 2^{mm} à 3^{mm} de diamètre, mais 1^{km} de ce fil coûterait plus de 1000^{fr}.

On pourrait encore accélérer la marche de la génératrice et, par suite, diminuer l'intensité du courant en augmentant le voltage, si toutefois la construction de la dynamo le permet.

4. *On projette de transporter à distance un travail* $\mathfrak{T}_u$, *à travers une résistance* R, *dans laquelle nous supposerons comprises les résistances des machines; la génératrice a une force électromotrice* E, *et la force contre-électromotrice de la réceptrice est égale à e. Quelle est la plus grande valeur admissible de* R?

Le travail moteur est $\mathfrak{T}_m = EI$; le travail utile $\mathfrak{T}_u$ égale d'autre part eI, et nous savons que

$$E - e = IR.$$

Résolvons ces équations par rapport à I, e et $\mathfrak{T}_m$; il vient

$$E - \frac{\mathfrak{T}_u}{I} = IR$$

---

[1] La vitesse de la réceptrice étant moindre que celle de la génératrice, nous ne comptons que 100^{kgm} de résistances passives au lieu de 150.

d'où

$$I = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4R\mathcal{E}_u}}{2R},$$

$$e = E - IR = \frac{E \mp \sqrt{E^2 - 4R\mathcal{E}_u}}{2}$$

et

$$\frac{\mathcal{E}_u}{\mathcal{E}_m} = \frac{e}{E} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - \frac{4R\mathcal{E}_u}{E^2}}}{2}.$$

Pour que I soit réel, il faut que R soit tout au plus égal à $\frac{E^2}{4\mathcal{E}_u}$.

Or la plus grande valeur acceptable de E est 3000 volts; on calculera donc sans peine la valeur limite de R. Elle est indépendante de la puissance des machines dont on dispose; elle croît avec le carré de la force électromotrice de la génératrice.

Cette solution générale est de M. Maurice Lévy.

5. *Une chute d'eau donne en un point une puissance de* 400 *chevaux qu'on utilise à actionner une dynamo génératrice, ayant une résistance intérieure de* 10 *ohms et un rendement de* 0,90 : *la tension aux bornes est de* 2000 *volts. Le courant est transmis à* 28^{km} *de distance par un conducteur dont la résistance est de* 30 *ohms et il est reçu par un électromoteur dont la résistance intérieure est de* 15 *ohms et le rendement de* 0,93. *Calculer la puissance disponible à la seconde station.*

Il n'y a qu'à suivre progressivement le développement de la puissance motrice.

Et d'abord, 400 chevaux produiront à la génératrice

$$736 \times 400 \times 0,92 = 270848 \text{ watts.}$$

Les 2000 volts de la génératrice donneront un courant de

$$\frac{2000}{10 + 30 + 15} = \frac{2000}{55} = 36,4 \text{ ampères.}$$

Mais ces 2000 volts n'arrivent pas à la réceptrice : elle n'en reçoit qu'une fraction qu'il est aisé de déterminer.

$$\frac{e}{2000} = \frac{15}{55},$$
$$e = 545,5 \text{ volts.}$$

La différence de potentiel aux bornes de la réceptrice étant de 545,5 volts, cette machine recevra une énergie égale à

$$545,5 \times 36,4 = 19852 \text{ watts,}$$

dont elle utilisera les 93 centièmes; l'énergie disponible sur l'arbre de la réceptrice sera donc de

$$19852 \times 0,93 = 18462 \text{ watts}$$
$$= 25 \text{ chevaux.}$$

Le rendement très faible de cette transmission d'énergie est bien fait pour montrer combien sont délicates ces questions, et combien il importe d'en calculer à l'avance tous les éléments.

6. *Traiter le même problème en cherchant à se placer dans les conditions du rendement maximum, mais en gardant la même valeur pour la résistance de la ligne.*

Le défaut de la transmission d'énergie étudiée ci-dessus consiste en ce que le courant est trop intense dans la canalisation; de plus, la résistance de cette canalisation est trop grande, relativement à celle des machines.

Pour diminuer l'intensité du courant, augmentons le voltage; à cet effet, nous pourrions accélérer la marche de la génératrice, mais il est préférable d'augmenter la tension du courant en augmentant l'intensité du champ et la longueur de l'induit, c'est-à-dire en exagérant la résistance intérieure des machines. On obtiendra ainsi des résultats bien meilleurs : les calculs suivants le prouvent.

Faisons $E = 5000$ volts : les dernières expériences de Laufen (août 1891) montrent que cette tension n'est pas excessive.

Admettons que les résistances intérieures des deux machines soient devenues égales à 30 et 60 ohms.

Répétons les calculs ci-dessus :

$$\frac{5000}{30+30+60} = \frac{5000}{120} = 41,6 \text{ ampères},$$

$$\frac{e}{5000} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2},$$

$$e = 2500,$$

$$2500 \times 41,6 = 104000 \text{ watts},$$
$$104000 \times 0,93 = 96720 \text{ watts}$$
$$= 96,72 \text{ kilowatts}$$
$$= 131 \text{ chevaux}.$$

Le rendement a été quintuplé.

Il est encore faible, mais il faut observer que la transmission s'opère à une fort grande distance.

7. *Une transmission d'énergie à distance se fait par une génératrice de* 1000 *volts à* 2^{km} *de distance, avec un rendement* ρ *de* 48 *pour* 100; *on veut doubler la distance et conserver le même rendement; quelle devra être la force électromotrice de la génératrice?*

$$\rho = \frac{e}{E},$$

$$T = EI = \frac{E(E-e)}{R} = \frac{E^2\left(1-\frac{e}{E}\right)}{R} = \frac{E^2(1-\rho)}{R}.$$

Le travail transmis et le rendement restant constants, il est nécessaire que $\frac{E^2}{R}$ reste constant aussi : donc, R étant devenu égal à 2R, nous aurons

$$\frac{x^2}{2R} = \frac{E^2}{R},$$

$$x = E\sqrt{2} = 1000 \times 1,414 = 1414 \text{ volts}.$$

8. *Dans les expériences de M. Marcel Deprez, entre Vizille et Grenoble, on obtint les résultats suivants :*

Force électromotrice de la génératrice E.....	1922 volts.
Force électromotrice de la réceptrice *e*.....	1087
Travail dépensé sur la génératrice.....	6,97 chevaux
Travail dépensé sur la réceptrice.....	3,30

INTENSITÉ MOYENNE DU COURANT I : 26 AMPÈRES.

Calculer les rendements mécanique et électrique.

Le travail électrique au départ se trouve être égal à

$$\frac{EI}{736} = \frac{1922 \times 2,6}{736} = 6,79 \text{ chevaux};$$

à l'arrivée,

$$\frac{eI}{736} = \frac{1087 \times 2,6}{736} = 3,84 \text{ chevaux}.$$

Rendement mécanique.....	0,473
Rendement électrique.....	0,565

La distance atteignait 14^{km}; les machines étaient réunies par deux fils de bronze silicieux de 2^{mm} de diamètre. La génératrice faisait dans certaines expériences plus de 1000 révolutions pour 600 de la réceptrice.

9. *Un transport d'énergie de* 5 *chevaux doit être fait par un fil télégraphique, et l'on s'impose de ne pas employer de courant d'intensité plus grande que de* 0,5 *ampère : quelles seront les forces électromotrices de la génératrice et de la réceptrice, sachant que l'ensemble des résistances atteint* 80 *ohms?*

La force électromotrice *e* aux bornes de la réceptrice est imposée par la condition que

$$\frac{e \times 0,5}{736} = 5 \text{ chevaux},$$

d'où

$$e = 7360 \text{ volts}.$$

Mais

$$I = 0,5 = \frac{E - e}{R} = \frac{E - 7360}{80}.$$

Il vient donc

$$E = 7360 + 80 \times 0,5 = 7400 \text{ volts.}$$

Le rendement électrique de cette installation serait fort élevé et égal à $\frac{e}{E} = \frac{7360}{7400} = 0,99$; mais il faut reconnaître que la puissance transmise est extrêmement faible.

CHAPITRE XXIII.

DISTRIBUTION DE L'ÉNERGIE.

1. *On veut envoyer* 25 *ampères, sous tension de* 100 *volts, à une distance de* 500^m; *mais on ne consent qu'une perte de* 6 *pour* 100. *Quel conducteur employer à cet effet?*

Cela revient à dire que la différence de potentiel entre les extrémités de la conduite doit être de 100 volts, et qu'il se perdra 6 volts le long de la canalisation. On écrira donc

$$\frac{6}{25} = 0,24 \text{ ohm}.$$

Le conducteur de cuivre aura par suite une section S donnée par l'équation

$$0,24 \times 10^9 = \alpha \frac{2l}{S} = \frac{1,584 \times 10^3 \times 100000}{S},$$

$$S = \frac{1,584 \times 10^8}{0,24 \times 10^9} = \frac{1,584}{2,4} = 0^{cm^2},66.$$

Le diamètre du conducteur devrait être de $0^{cm},092$, soit de $9^{mm},2$.

2. *On veut alimenter* N *lampes ou appareils quelconques, de résistance* R, *par une distribution en fil double ayant une longueur* l; *mais on impose comme condition que la perte dans les conducteurs ne dépasse pas* 2 *pour* 100 *de l'énergie totale dépensée. Quel poids de cuivre faudra-t-il employer?*

La résistance réduite des N appareils, dont chacun a une

résistance R, n'est que de $\frac{R}{N}$; comme la perte dans les conducteurs ne doit pas dépasser ε pour 100, il est évident que la résistance r du conducteur sera donnée par l'équation

$$r = \varepsilon \frac{R}{N}.$$

Or

$$\frac{r}{2} = \alpha \frac{l}{S};$$

donc

$$S = \frac{2\alpha l N}{\varepsilon R}.$$

Le volume et le poids s'en déduisent aisément :

$$P = 2 l S \delta = \frac{4\alpha l^2 \delta N}{\varepsilon R}.$$

3. *Traiter le même problème en convenant de mettre, dans chaque dérivation, deux lampes ou appareils quelconques en série.*

La seule différence avec le cas précédent consiste en ce qu'on aura, non plus N dérivations de résistance R, mais $\frac{N}{2}$ dérivations de résistance 2R.

Il vient, par suite,

$$S = \frac{2\alpha l}{\varepsilon} \frac{N}{2} \frac{1}{2R} = \frac{\alpha l N}{2\varepsilon R}.$$

On voit que cette section est 4 fois moindre que ci-dessus. On économisera donc $\frac{3}{4}$ du poids de cuivre.

4. *Une source, dont la force électromotrice est de* 100 *volts, alimente une distribution dont la résistance est de* 8 *ohms et renfermant un récepteur ayant* 18 *ohms de résistance. Un essai a fait reconnaître l'existence d'un défaut, placé au premier quart de la longueur de la conduite : sa résistance*

est de 25 ohms. Quelle est l'intensité du courant utilisable au récepteur?

Soit r_1 la résistance du circuit avant le défaut, r_2 la résistance après le défaut, i_1 et i_2 les intensités du courant, dans les parties correspondantes; désignons par r' la résistance du défaut, et par i' le courant allant à la terre :

$$i_1 = i' + i_2,$$

$$\frac{i_2}{i'} = \frac{r'}{r_2}, \qquad \frac{i_2}{i_2 + i'} = \frac{r'}{r_2 + r'};$$

d'où

$$i_2 = i_1 \frac{r'}{r_2 + r'}.$$

Mais

$$i_1 = \frac{E}{\frac{r' r_2}{r_2 + r'} + r_1}.$$

Par suite,

$$i_2 = \frac{r' E}{r' r_2 + r_1 r_2 + r_1 r'}$$
$$= \frac{25 \times 100}{25(6 + 18) + 2(6 + 18) + 2 \times 25} = 3,58 \text{ ampères.}$$

5. *Pour mesurer la résistance réduite d'isolement à la terre r' de l'ensemble d'une canalisation, l'administration prescrit d'intercaler successivement entre la terre et chacun des deux conducteurs positif et négatif un ampèremètre sensible. Le premier fil donne un courant d'intensité $+ i_1$, le second un courant $- i_2$. La résistance de l'ampèremètre étant très faible, comment peut-on déduire r' de la somme algébrique $(i_1 - i_2)$?*

Soient r'_1 et r'_2 les résistances respectives d'isolement des fils positif et négatif; on a, en négligeant la résistance de l'ampèremètre :

$$i_1 = \frac{E}{r'_1} \qquad \text{et} \qquad - i_2 = \frac{-E}{r'_2},$$

d'où

$$i_1 - i_2 = \frac{E}{r'_1} - \frac{E}{r'_2} = \frac{E}{r'}$$

et

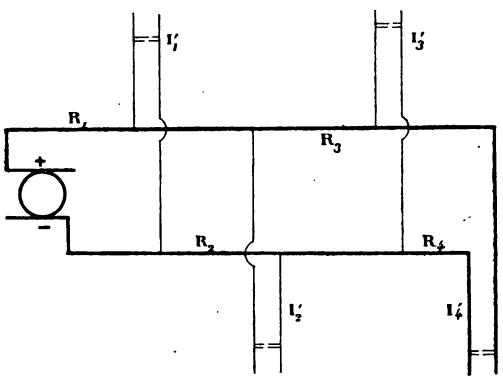
$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2}, \qquad r' = \frac{1}{\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2}} = \frac{r'_1 r'_2}{r'_2 - r'_1}.$$

L'administration exige que $i_1 - i_2$ soit moindre que la millième partie du courant débité par la source.

6. *Un double circuit doit recevoir à* 100, 200, 500 *et* 1000 *mètres des appareils, placés en dérivation ou sur circuits secondaires, exigeant tous* 100 *volts, avec des intensités de* 80, 50, 30 *et* 5 *ampères. On projette d'employer des conducteurs à section constante, mais la perte doit rester inférieure à* 10 *pour* 100 *de la force électromotrice initiale. Calculer sur ces données la section des conducteurs.*

La *fig.* 46 montre le dispositif à adopter.

Fig. 46.



Soient R_1, R_2, R_3 et R_4 les résistances des segments de conducteur compris entre les dérivations; I_1, I_2, I_3 et I_4 les intensités respectives des segments et I'_1, I'_2, I'_3 et I'_4 les valeurs des courants dans les dérivations.

Les valeurs de I_1, I_2, I_3 et I_4 sont déterminées par la somme des courants dérivés à fournir en aval des points considérés, c'est-à-dire que nous avons

$$\begin{aligned} I_1 &= I'_1 + I'_2 + I'_3 + I'_4, \\ I_2 &= I'_2 + I'_3 + I'_4, \\ I_3 &= I'_3 + I'_4, \\ I_4 &= I'_4. \end{aligned}$$

La chute de potentiel dans chaque segment est

$$\begin{aligned} 2R_1I_1 &= 2R_1(I'_1 + I'_2 + I'_3 + I'_4), \\ 2R_2I_2 &= 2R_2(I'_2 + I'_3 + I'_4), \\ 2R_3I_3 &= 2R_3(I'_3 + I'_4), \\ 2R_4I_4 &= 2R_4(I'_4). \end{aligned}$$

La perte totale consentie étant de 10 volts, nous aurons

$$\begin{aligned} 10 &= 2(I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4) \\ &= 2[I'_1R_1 + I'_2(R_1 + R_2) + I'_3(R_1 + R_2 + R_3) \\ &\qquad + I'_4(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)] \\ &= 2(I'_1 l_1 + I'_2 l_2 + I'_3 l_3 + I'_4 l_4)\frac{\alpha}{S}, \end{aligned}$$

en appelant l_1, l_2, l_3 et l_4 les distances des dérivations à l'origine.

Nous sommes donc conduits à l'équation

$$S = \frac{2\alpha}{10}(I'_1 l_1 + I'_2 l_2 + I'_3 l_3 + I'_4 l_4).$$

Dans le cas proposé, nous aurons, en U.E.M.,

$$\begin{aligned} S &= \frac{2 \times 1{,}584 \times 10^3}{10 \times 10^8}(8 \times 10000 + 5 \times 20000 + 3 \times 50000 + 0{,}5 \times 100000) \\ &= \frac{2 \times 1{,}584 \times 10^7}{10^9}(8 + 10 + 15 + 5) \\ &= \frac{3{,}168 \times 38}{10^2} = 1^{cm^2},2040 = 120^{mm^2}. \end{aligned}$$

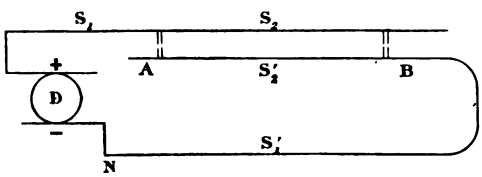
Le diamètre des fils sera de $1^{cm},26$.

7. *On veut alimenter dans une usine deux appareils dont l'un exige* 50 *ampères, l'autre* 6 *ampères, aux mêmes différences de potentiel de* 100 *volts : on dispose, à cet effet, d'une dynamo donnant* 108 *volts et l'on emploie le système de distribution à boucle de la fig.* 47; *la distance du premier appareil est de* 80^m, *celle du second de* 240^m. *Calculer les sections du conducteur.*

Conservons les notations du problème précédent.

Le courant de la dynamo D à l'appareil A a une intensité de $50 + 6 = 56$ ampères; de A en B, il n'en faut plus que 6;

Fig. 47.



il est donc indiqué de prendre un conducteur de section différente de D en A et de A en B, sans oublier toutefois que la perte de voltage ne peut pas dépasser 8 volts au maximum.

Admettons en DA, sur le fil positif, une densité de courant de 2 ampères par millimètre carré; cela nous donne une section de 28^{mm^2}. Abaissons cette densité à 1,5 de A en B, sur le même fil : la section sera de 4^{mm^2}. Quelles seront les pertes de potentiel e_1 et e_2 sur ce fil en A et en B?

$$e_1 = I_1 R_1 = I_1 \alpha \frac{l}{S_1},$$

$$e_2 = I_2 R_2 = I_2 \alpha \frac{l}{S_2};$$

d'où, en U.E.M.,

$$e_1 = \frac{5,6 \times 1,584 \times 10^3 \times 8000}{0,28} = 2,5 \times 10^8 = 2,5 \text{ volts},$$

$$e_2 = \frac{0,6 \times 1,584 \times 10^3 \times 24000}{0,04} = 5,7 \times 10^8 = 5,7 \text{ volts}.$$

Ces pertes étant acceptables, nous allons chercher quelle perte sera disponible, sur le fil négatif, en B et en A.

En B :

$$8 - 5,7 = 2,3 \text{ volts.}$$

En A :

$$8 - 2,5 = 5,5 \text{ volts.}$$

Les sections du fil négatif sont dès lors composées par les équations :

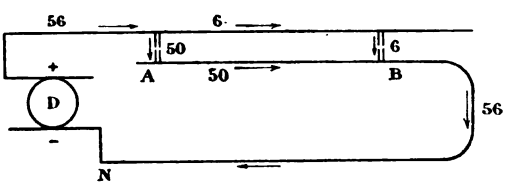
En DNB :

$$2,3 \times 10^8 = \frac{5,6 \times \alpha \times l}{S'_1};$$

En BA :

$$(5,5 - 2,3)\,10^8 = \frac{5,0 \times \alpha \times l}{S'_2}.$$

Fig. 48.



Il viendra

$$S'_1 = \frac{5,6 \times 1,584 \times 10^3 \times 24000}{2,3 \times 10^8} = 0^{cm^2},92,$$

$$S'_2 = \frac{5,0 \times 1,584 \times 10^3 \times 16000}{3,2 \times 10^8} = 0^{cm^2},40.$$

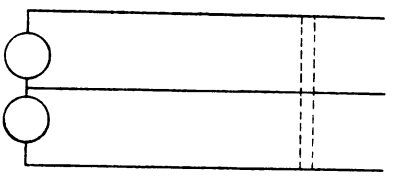
Les calculs de ce genre sont plus laborieux que difficiles.

8. *Pour desservir quatre appareils de résistance r, exigeant* 100 *volts chacun, on emploie deux machines en tension et une distribution à trois fils* (*fig.* 49); *quel poids de cuivre faudra-t-il, pour une distance l, la perte étant au plus de* ε *pour* 100?

Nous retrouvons le cas du problème 3 et la section des

conducteurs se calculera de même; le poids sera 1,5 fois plus grand, puisqu'il y a 3 fils au lieu de 2. L'économie sur le

Fig. 49.



dispositif du problème 2 est donc réduite; au lieu de faire une économie de $\frac{3}{4}$ sur le poids de cuivre, on n'a plus qu'un bénéfice de $\frac{5}{8}$, car le poids est devenu égal aux $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ de ce qu'il était d'abord.

9. *Un court circuit s'est établi accidentellement entre deux lignes parallèles, qui sont inabordables. Comment pourra-t-on calculer la position du défaut?*

Le procédé consiste à mesurer trois résistances : celle d'une ligne, celle de la boucle formée par les deux lignes réunies par le court circuit et enfin celle que présente le premier tronçon d'une ligne réunie au second tronçon de l'autre par le court circuit. Dans ces deux cas, on part de terre pour revenir à terre.

Soient donc r_1 et r_2 les résistances des deux tronçons de la première ligne et r'_1 celle du premier tronçon de la seconde. Nous aurons

1°

$$A = \text{Terre} + r_1 + r_2 + \text{Terre}.$$

2°

$$B = r_1 + r'_1.$$

3°

$$C = \text{Terre} + r'_1 + r_2 + \text{Terre}.$$

On en déduit

$$A - C = r_1 - r'_1,$$

d'où

$$r_1 = \frac{A + B - C}{2}$$

et

$$r'_1 = \frac{B - A + C}{2}.$$

Il reste à connaître la résistance kilométrique des lignes pour calculer par r_1 et r'_1 la distance du court circuit cherché.

CHAPITRE XXIV.

ÉCLAIRAGE ÉLECTRIQUE.

1. *Un amateur, qui dispose de* 20 *éléments Poggendorff, désire savoir combien il pourra alimenter de lampes à incandescence de* 10 *bougies,* 40 *volts,* 0,6 *ampère et* 32 *ohms de résistance à chaud.*

Supposons que ces lampes, en nombre x, soient montées en dérivation : leur résistance totale est égale à $\frac{R}{x} = \frac{32}{x}$ ohms à chaud. L'intensité du courant fourni par la pile sera donc donnée par l'équation

$$I = \frac{nE}{nr + \frac{R}{x}}.$$

Or chaque lampe ne reçoit qu'un courant d'intensité $\frac{I}{x} = i$; donc $I = ix$. Mais i est connu, puisque l'intensité est imposée : nous pouvons donc calculer x.

$$\frac{nE}{nr + \frac{R}{x}} = ix,$$

$$x = \frac{nE - Ri}{nri} = \frac{20 \times 2,01 - 32 \times 0,6}{20 \times 0,25 \times 0,6} = 7 \text{ lampes.}$$

2. *Quel est le plus petit nombre d'éléments Leclanché nécessaire pour suffire à une lampe Swan de* 50 *volts et*

0,75 ampère, donnant 8 bougies? Sa résistance R *est à chaud de 70 ohms.*

$$I = \frac{xE}{xr + R}.$$

La résistance intérieure de la pile est r, et sa force électromotrice est E.

Nous aurons

$$xE = I(xr + R),$$

$$x = \frac{IR}{E - Ir}$$

$$= \frac{0,75 \times 70}{1,45 - 0,75 \times 1,10}$$

$$= 84 \text{ éléments.}$$

3. *Combien faut-il d'accumulateurs Planté, contenant chacun 1500gr de plomb, pour suffire pendant une heure à l'alimentation de 30 lampes Edison de 50 volts et 1 ampère, ayant chacune une résistance de 40 ohms à chaud?*

Plaçons encore les lampes en dérivation; il faut au moins $\frac{50}{2,1} = 24$ accumulateurs pour obtenir les 50 volts nécessaires.

Le courant total sera d'au moins 30 ampères, car

$$I = \frac{24 \times 2,1}{\frac{40}{30} + 24 \times 0,01} = 31 \text{ ampères.}$$

Nous négligeons dans ce calcul la résistance relativement faible de la canalisation.

Au taux de 36360 coulombs par kilogramme de plomb, chaque accumulateur a une capacité totale de 54540 coulombs dont les $\frac{2}{3}$ seulement sont utilisables, soit 36000 coulombs environ et 864000 pour les 24 piles secondaires.

Nous pouvons, d'après ces données, calculer la durée possible de l'éclairage; en effet, l'énergie utilisable est de

$$\frac{864000 \times 2,1}{9,81} = 185\,142^{\text{kgm}}.$$

L'énergie consommée par heure pour les 30 lampes est égale à

$$\frac{50 \times 30 \times 3600}{9.81} = 551020^{kgm}.$$

La durée maximum de l'éclairage sera donc d'environ

$$\frac{185142}{551020} = 0^h,34 = 20^m.$$

Pour le prolonger, et atteindre l'heure, on emploiera par conséquent trois groupes de 24 accumulateurs, qu'on réunira en batterie, pour alimenter les 30 lampes.

4. *Un industriel désire organiser dans ses ateliers un éclairage de secours de* 60 *lampes Gabriel* (16 *bougies,* 102 *volts,* 3,5 *watts par bougie*), *fonctionnant après l'arrêt des machines motrices pendant six heures. Il se décide à employer à cet effet des accumulateurs Faure-Sellon-Volckmar : quel type choisira-t-il et combien prendra-t-il d'éléments étant donné le Tableau suivant :*

Type.	Numéro.	Capacité en ampères-heures.	Nombre de plaques.
I....	1.....	50	4
	2.....	100	8
	3.....	150	12
II...	4.....	210	9
	5.....	280	12
	6.....	350	15
	7.....	420	18
	8.....	560	24
	9.....	700	30

La force électromotrice moyenne d'un élément est de 1,90 volt pendant la décharge; elle passe de 2,35 volts à 1,78 volt environ, ce dernier chiffre devant être considéré comme un minimum au-dessous duquel il n'est pas sage de descendre.

Il faudra donc employer $\frac{102}{1,9} = 54$ éléments.

Or une lampe de 16 bougies consomme $16 \times 3,5 = 56$ watts.

Pour 60 lampes, il faudra $56 \times 60 = 3360$ watts.

L'intensité du courant sera de $\frac{3360}{102} = 33$ ampères.

Il faudra, par suite, une disponibilité de $33 \times 6 = 198$ ampères-heure.

Il convient donc de prendre 54 éléments du type II, n° 4.

5. *Combien peut-on alimenter de lampes à arc Brush, montées en dérivation, exigeant chacune* 50 *volts et* 10 *ampères, avec* 26 *accumulateurs Tudor,* n° III, *renfermant chacun* $15^{kg},5$ *d'électrodes, et combien de temps durera cet éclairage?*

A la fin de la charge, on peut estimer à 2,3 volts la force électromotrice d'un élément; mais elle tombe rapidement, pour se maintenir fort longtemps à 1,92 volt. On peut affirmer sans crainte qu'on ne descend pas au-dessous de cette limite en déchargeant les accumulateurs à moitié.

Or nous avons précisément $\frac{50}{26} = 1,92$; durant tout le temps de cette décharge à moitié nous aurons donc assez de voltage pour notre arc.

Mais le poids de plaques est de $15^{kg},5$ par élément; la capacité totale du kilogramme pouvant être estimée à 26000 coulombs, nous en utiliserons $\frac{26000}{2} \times 15,5 = 201500$, ce qui équivaut à $\frac{201500}{3600} = 56$ ampères-heure.

Nous pourrons donc soutenir un courant de 8 ampères pendant 7 heures : en d'autres termes, nous disposerons de 7 heures de lumière pour un seul arc.

Si nous voulons faire deux arcs, il nous faudra 16 ampères, puisqu'ils sont en dérivation, par hypothèse. On serait disposé à croire que la batterie donnera 3 heures et demie de lumière : mais il n'en est rien, car le rendement des accumulateurs baisse à mesure que leur débit augmente. Le courant ayant doublé, la capacité diminuera d'un tiers environ, de sorte que nous ne disposerons plus que de 38 ampères-heure, ce qui fait 2 heures et demie d'éclairage pour deux arcs.

Si nous avions disposé de 28 accumulateurs au lieu de 26, nous aurions pu les décharger aux $\frac{2}{3}$, comme on le fait habituellement, jusqu'à ce que la force électromotrice fût tombée à 1,78 volt. Dans ces conditions, nous aurions eu une disponibilité de

$$\frac{2}{3}\,\frac{26000 \times 15,5}{3600} = 74 \text{ ampères-heure.}$$

Nous aurions par suite entretenu un arc pendant 9 heures environ et deux arcs pendant 3 heures au moins. L'adjonction de deux accumulateurs sur 26 peut donc donner un résultat avantageux dans certains cas particuliers analogues à celui que nous venons de traiter.

6. *Un courant, qui traverse une lampe à incandescence, produit entre les attaches de la lampe une différence de potentiel de* 25 *volts et une différence de* 12,5 *volts entre les extrémités d'un fil de* 10 *ohms; quelle est la résistance de cette lampe à chaud?*

$$E = IR, \qquad E' = Ix,$$

$$x = R\,\frac{E'}{E} = 20 \text{ ohms.}$$

7. *Calculer la résistance intérieure moyenne d'une lampe à arc, sachant que deux lampes montées en série sont traversées par un courant de* 11 *ampères; la canalisation a* 4,3 *ohms de résistance; quant à la génératrice, c'est une dynamo de résistance égale à* 2,8 *ohms, donnant* 138 *volts entre ses bornes.*

$$11 = \frac{138}{4,3 + 2,8 + 2x},$$

$$2x = \frac{138}{11} - 7,1 = 5,4,$$

$$x = 2,7 \text{ ampères.}$$

8. *Dix lampes à incandescence Lane-Fox sont montées en série dans un circuit dont la résistance totale, dynamo comprise, est de* 6,7 *ohms : la résistance à chaud de chacune d'elles*

est de 28.3 *ohms: l'intensité de courant qui leur convient est de* 1,77 *ampère. A quel voltage devra être réglée la dynamo?*

$$1,77 = \frac{x}{6,7 + 10 \times 28,3},$$

$$x = 512,8 \text{ volts.}$$

Cela met chaque lampe à un régime de 50 volts.

9. *Les dix lampes précédentes étant montées en dérivation dans un circuit dont la résistance en fils est de* 5,2 *ohms, celle de la dynamo y comprise, quel devra être le voltage de la dynamo génératrice?*

Les mêmes considérations que ci-dessus nous donneront

$$17,7 = \frac{x}{5,2 + 2,83},$$

car l'intensité du courant est décuple de celle qu'il faut à chaque lampe et la résistance de la batterie placée en dérivation entre les deux fils parallèles est moitié moindre.

On trouve

$$x = 8,03 \times 17,7 = 142 \text{ volts.}$$

Or, à ce régime, les lampes seraient brûlées, si l'on ne remédiait à cet état de choses, soit en prenant une dynamo et une canalisation moins résistante, soit en choisissant des lampes moins résistantes, soit enfin en adoptant un type tolérant ce haut voltage de 142 volts.

10. *Une dynamo, donnant* 1800 *volts, a une résistance intérieure de* 0,93 *ohm. Elle alimente une canalisation de* 6,3 *ohms, renfermant* 300 *lampes Maxim, disposées en* 30 *séries de* 10 *lampes. Chaque lampe a une résistance de* 43 *ohms à chaud. Quelle sera l'intensité du courant dans chaque lampe?*

Chaque série de lampes a une résistance de 430 ohms; mais la batterie donne une résistance 30 fois moindre, soit égale à $\frac{430}{30} = 14,33$ ohms.

La résistance totale égale donc

$$14,33 + 0,93 + 6,3 = 20,86 \text{ ohms.}$$

L'intensité du courant sera par suite de $\frac{1800}{20,80} = 86,3$ ampères.

Par série, nous aurons par conséquent $\frac{86,3}{30} = 2,88$ ampères, et par lampe 0,29 ampère.

Ce courant très faible ne suffira généralement pas, et pourtant on ne peut guère augmenter le voltage, qui est de 60 volts par lampe, à moins de prendre un modèle de lampe à 100 volts; il conviendra pour lors de forcer encore le voltage de la machine.

11. *On alimente un arc par un courant de* 10,3 *ampères; la chute de potentiel est de* 46,6 *volts. Quelle est en watts la dépense d'énergie effectuée dans cette lampe et combien pourrait-on en desservir par une machine à vapeur ayant une puissance effective de* 10 *chevaux?*

L'énergie dépensée en watts est donnée par le produit EI;

$$W = EI = 46,6 \times 10,3 = 480 \text{ watts.}$$

Théoriquement, un cheval effectif donne 736 watts; mais, si l'on tient compte de toutes les résistances passives et des pertes d'énergie, on arrive à ne pas compter plus de 600 watts par cheval.

Le moteur aura donc, pour x lampes, une puissance de

$$\frac{480 \times x}{600} = 10 \text{ chevaux,}$$

d'où nous déduisons x :

$$x = 12.$$

Un arc de ce type donnant aisément 50 carcels, on voit que 600 carcels sont produits par 10 chevaux, soit 60 carcels par cheval mécanique.

12. *Une machine de* 100 *chevaux alimente en série* 52 *grands*

arcs, fonctionnant à une tension de 58,8 *volts, avec une intensité de courant de* 18,5 *ampères. La résistance des conducteurs, y compris celle de la dynamo, est de* 22 *ohms. Quelle devra être la force électromotrice totale et quel sera le rendement mécanique de cette installation?*

La force électromotrice totale E est déterminée d'abord par le voltage E′ des lampes et ensuite par les résistances des conducteurs.

$$\begin{aligned} E &= \Sigma E' + I\Sigma R \\ &= 52 \times 58{,}8 + 18{,}5 \times 22 \\ &= 3465 \text{ volts.} \end{aligned}$$

Chaque arc consomme

$$58{,}8 \times 18{,}5 = 1087 \text{ watts.}$$

Pour 52 lampes, cela fait $1087 \times 52 = 56524$ watts.

Mais les canalisations absorbent aussi de l'énergie : cette énergie est égale à

$$I^2R = \overline{18{,}5}^2 \times 22 = 7524 \text{ watts.}$$

L'énergie totale absorbée est par suite égale à

$$56524 + 7524 = 64048 \text{ watts.}$$

Or 100 chevaux correspondent théoriquement à 73600 watts.

Le rendement est par suite égal à

$$\frac{64048}{73600} = 0{,}87.$$

13. *On organise un éclairage par* 10 *lampes à arc Cance* (50 *volts,* 7,5 *ampères*) *et* 16 *lampes à incandescence de* 20 *bougies* (50 *volts,* 0,9 *ampère*); *une même dynamo alimente les arcs et l'incandescence; un circuit spécial renferme les* 10 *arcs, montés en dérivation, et un second circuit distribue le courant aux lampes à incandescence. Quelle est la puissance du moteur nécessaire à cet éclairage?*

Dans chaque circuit devra être intercalé un rhéostat à

curseur, destiné à équilibrer la résistance de tous les circuits entre eux et se réglant une fois pour toutes pour assurer aux lampes les 50 volts qui leur sont nécessaires : il sera nécessaire d'avoir 70 volts aux bornes de la dynamo.

Le travail électrique par lampe sera de

$$\begin{aligned} EI &= 70 \times 7,5 = 525 \text{ watts} \\ &= \frac{525}{9,8} = 53^{kgm},57 \\ &= \frac{53,57}{75} = 0,714 \text{ cheval.} \end{aligned}$$

On peut compter sur un rendement de 80 pour 100 à la dynamo; d'autre part, la transmission prendra au moins 10 pour 100. Le rendement sera, par suite, égal à

$$0,80 \times 0,90 = 0,72.$$

Le travail mécanique absorbé au tableau par lampe est donc de $\frac{0,714}{0,72} = 0,916$ cheval.

Pour l'incandescence, nous aurons

$$70 \times 0,9 = 63,00 \text{ watts} = 6^{kgm},43 = 0,086 \text{ cheval.}$$

Le travail correspondant est de $\frac{0,086}{0,72} = 0,120$ cheval.

Il nous faudra donc $0,916 \times 10 + 0,120 \times 16 = 11,08$ chevaux, disponibles sur l'arbre de la dynamo : sur l'arbre du moteur, il faudra au moins 12,5 chevaux.

Pour donner à la marche du moteur l'élasticité suffisante, on cherchera à disposer d'une puissance d'environ 14 à 15 chevaux effectifs.

14. *Un moteur à gaz Crossley, accouplé directement avec une dynamo, doit alimenter* 5 *lampes Sunbeam de* 1000 *bougies* (100 *volts,* 20 *ampères*); *quelle devra être la puissance de ce moteur?*

$$\begin{aligned} 100 \times 20 \times 5 &= 10000 \text{ watts} \\ &= \frac{10000}{736} = 13,6 \text{ chevaux.} \end{aligned}$$

Le rendement étant de 0,72, il faudra disposer de 18,8 chevaux.

On fera bien d'installer un moteur de 20 à 22 chevaux, car il importe toujours de disposer d'un excès de puissance.

15. *Une machine Thomson-Houston est établie pour fournir un courant de 10 ampères à 24 lampes à arc, disposées en série; le circuit a 4,8 ohms de résistance; quelles devront être les constantes de la dynamo employée?*

Estimons à 45 volts la force électromotrice nécessaire par arc; il faudra $45 \times 24 = 680$ volts au minimum.

Mais c'est un minimum, car il faut tenir compte des pertes; or admettons que la dynamo adoptée ait 18 ohms de résistance; nous aurons

$$IR = 10(4,8 + 18) = 228.$$

La dynamo devra donc développer $680 + 228 = 908$ volts.

Entre les bornes, elle aura une force électromotrice évidemment moindre, dont la valeur dépendra de la résistance des arcs adoptés.

16. *Dans le problème précédent, supposons que chaque arc ait 5,5 ohms de résistance et que le circuit ait 400^{m} de long; on s'impose de ne perdre que $\frac{1}{30}$ d'énergie dans le conducteur. Quel sera le diamètre minimum du fil de cuivre formant canalisation?*

La résistance du câble doit être le $\frac{1}{30}$ de la résistance totale, donc le $\frac{1}{29}$ de la résistance des arcs et de la dynamo : cette résistance sera dès lors égale à

$$\frac{5,5 \times 24 + 18}{29} = \frac{150}{29} = 5,17 \text{ ohms.}$$

Par mètre, le câble aura donc une résistance de

$$\frac{5,17}{400} = 0,0129 \text{ ohm}$$

et son diamètre sera de $1^{mm},35$. Ce diamètre serait trop

faible, à un autre point de vue, car la densité du courant serait trop forte; on pourrait facilement réduire la perte à $\frac{1}{80}$, sans grever d'une trop grosse dépense l'établissement de cette installation. On aurait alors

$$R = \frac{150}{79} = 1,9 \text{ ohm},$$
$$d = 2,1.$$

17. *Un moteur à gaz Charon développe une puissance de* 26,10 *chevaux dans le bassin de La Pallice* (*La Rochelle*) *et il alimente* 32 *arcs voltaïques et* 4 *lampes à incandescence, en consommant par heure* 12300^{lit} *de gaz. Quel est le rendement de cette installation, sachant qu'on a relevé au tableau* 205 *volts et* 61 *ampères? Combien de litres de gaz coûte le watt-heure?*

La puissance électrique utile est de $\frac{205 \times 61}{736} = 17,00$ chevaux.

Le rendement est égal à $\frac{17,00}{26,10} = 0,65$.

La dépense de gaz par watt-heure ne dépasse pas $\frac{12300}{205 \times 61}$, soit environ 1^{lit}, ce qui est un excellent résultat, qui mérite d'être noté.

18. *En admettant que l'on puisse obtenir couramment le watt-heure par* 1^{lit} *de gaz consommé dans un moteur, y a-t-il avantage à employer des lampes à incandescence de* 16 *bougies, exigeant* 3,5 *watts par bougie ou des lampes à récupération Sée, donnant la carcel par* 30^{lit}, *réflecteur enlevé?*

Les 16 bougies donnent environ 1,9 carcel, qu'on obtiendra par 56^{lit} de gaz, soit par 30^{lit} de gaz à la carcel : les deux sources de lumière sont donc comparables.

19. *Faire la même comparaison entre une lampe Auer consommant* 70^{lit} *par heure et donnant* 28 *bougies et une lampe à* 2,5 *watts par bougie, ayant une puissance de* 16 *bougies.*

Pour 28 bougies, il faudrait $28 \times 2,5 = 70$ watts, donc 70^{lit}

de gaz au moteur par heure : c'est tout juste ce que consomme le bec Auer.

20. *Comparer la chaleur dégagée par une lampe Édison de* 16 *bougies avec celle d'un bec de gaz Bengel, de même puissance lumineuse.*

On obtient aisément la bougie par 3 watts : la quantité de chaleur équivalente s'obtient en multipliant ces watts, dont le nombre est égal aux joules dépensés par seconde, par le facteur $\frac{1}{425 \times 9,81} = 0,00024$. Une lampe de 16 bougies donne par suite

$$16 \times 3 \times 0,00024 \times 3600 = 42 \text{ calories.}$$

Un bec de gaz équivalent à 16 bougies brûle 170^{lit} à l'heure, dégageant ainsi $5250 \times 0,17 = 892$ calories.

C'est vingt fois plus de chaleur, à égalité de lumière.

21. *La Société Khotinski vend* $1^{\text{fr}},65$, $2^{\text{fr}},10$ *et* $2^{\text{fr}},20$ *ses lampes de* 10 *bougies à* 3,5, 2,5 *et* 2 *watts par bougie : elle estime leurs durées respectives à* 1000, 500 *et* 300 *heures. Quel est le coût de la lampe-heure dans les trois cas, sachant que le watt-heure revient généralement à* 0,067 *centime?*

L'alimentation de la lampe-heure dans les trois cas coûte

$$0,067 \times 35 = 2^{\text{c}},345,$$
$$0,067 \times 25 = 1^{\text{c}},675,$$
$$0,067 \times 20 = 1^{\text{c}},340.$$

Le prix d'établissement de la lampe revient par heure à

$$\frac{165}{1000} = 0^{\text{c}},165, \qquad \frac{210}{500} = 0^{\text{c}},420, \qquad \frac{220}{300} = 0^{\text{c}},733.$$

En somme, nous avons donc :

Lampe de 3,5 watts	.....	$2^{\text{c}},345 + 0^{\text{c}},165 =$	$2^{\text{c}},510$
» 2,5 »	.....	$1,675 + 0,420 =$	$2,095$
» 2,0 »	.....	$1,340 + 0,733 =$	$2,073$

Les lampes de 2 watts sont donc les plus économiques et

elles donnent, sur les lampes à 3,5 watts, un bénéfice de plus de 17 pour 100.

On remarquera, d'autre part, qu'avec le même moteur et la même dynamo, on peut alimenter 2000 lampes à 3,5 watts, 2800 à 2,5 et 3500 à 2 watts par bougie : dans le dernier cas, on obtient donc 1,75 fois plus de lumière que dans le premier, avec la même installation, ce qui vient encore augmenter beaucoup le bénéfice des lampes à faible dépense d'énergie. En somme, l'économie réalisée par les lampes à 2 watts n'est pas loin de 30 pour 100.

22. *On fait un projet d'éclairage en employant des lampes de* 50 *ou de* 100 *volts; quel sera la section relative des conducteurs à employer dans les deux cas?*

Les lampes à voltage élevé sont plus résistantes que les autres et l'on ne se trompe guère en disant que leur résistance croît proportionnellement à leur voltage. Or, pour une même intensité de courant, le pouvoir éclairant croît avec la résistance : ainsi deux lampes Édison, de 70 ou de 140 ohms, donnent 8 ou 16 bougies par un même courant de 0,75 ampère. On peut donc conclure de cette comparaison que la lumière produite est proportionnelle à l'énergie (EI) dépensée, de telle sorte qu'il ne paraît pas plus avantageux, à ce point de vue, d'employer des lampes de 100 volts au lieu de lampes de 50.

Mais les hauts voltages procurent une économie notable de cuivre dans les conducteurs, par suite de la diminution relative de l'intensité du courant : ainsi, dans l'exemple cité ci-dessus, le même courant de 0,75 ampère par lampe donne 8 ou 16 bougies.

Admettons, comme établi d'une manière générale, qu'en doublant le voltage on réduise de moitié le nombre d'ampères nécessaires pour produire le même éclairage avec des lampes de 50 ou de 100 volts. Il est évident qu'à densité égale de courant dans les conducteurs, on pourra diminuer de moitié la section du fil de cuivre.

Il y aurait évidemment intérêt à employer des lampes de 200 volts; mais leur fabrication est extrêmement délicate et l'on a dû y renoncer après d'infructueux essais.

23. *Une lampe Gabriel, marquée* 10 *bougies et* 102 *volts, est poussée à* 110 *volts; l'intensité du courant croît de* 0,39 *à* 0,44 *ampère; quelle sera l'augmentation de pouvoir éclairant et la variation de la dépense en watts par bougie?*

On admet généralement que le pouvoir éclairant est proportionnel à $(EI)^3$, soit dans le cas présent à $(110 \times 0,44)^3$: l'augmentation est donc de $\left(\frac{110 \times 0.44}{102 \times 0,39}\right)^3 = 1,8$.

On obtiendra par suite 18 bougies au lieu de 10.

En réalité, M. Haubtmann a constaté que l'augmentation était multipliée par le facteur 2,06; mais ce résultat n'est pas durable et, en admettant que la lampe résiste à ce régime anormal, elle perd rapidement sa puissance lumineuse.

Les watts étaient, à 102 volts, égaux à $\frac{102 \times 0,39}{10} = 3,98$ par bougie; ils sont tombés à $\frac{110 \times 0.44}{18} = 2,69$.

Dans une expérience de M. Haubtmann, ils ont passé de 3,00 à 2,11.

On voit qu'il y a toujours avantage à pousser un peu les lampes, dût-on même s'exposer à réduire leur durée : cette tendance s'accentuera au fur et à mesure que le prix des lampes diminuera.

24. *Une batterie d'accumulateurs alimente une installation d'éclairage par lampes à incandescence; après* 5 *heures de fonctionnement, l'intensité du courant débité tombe de* 34 *à* 30 *ampères. De combien aura baissé la lumière fournie par les lampes qui sont normalement de* 16 *bougies?*

Appliquons la même formule que ci-dessus : le coefficient de réduction est égal à $\left(\frac{EI}{E'I}\right)^3 = \left(\frac{I^2R}{I'^2R'}\right)^3 = \left(\frac{I}{I'}\right)^6$, en admettant que la résistance des lampes n'ait pas changé.

Nous avons $\left(\frac{30}{34}\right)^6 = 0,472$.

Les lampes de 16 bougies n'en donnent plus que 7,5.

On ne saurait donc tolérer une chute aussi grande dans l'intensité du courant.

25. *Le rendement des lampes à incandescence diminue avec la durée de leur fonctionnement; étant donné qu'une lampe de* 20 *bougies n'en donne plus que* 13 *au bout de* 1000 *heures, sachant d'ailleurs qu'elle exigeait au début* 3,5 *watts par bougie, calculer l'augmentation de dépense correspondante à la millième heure.*

Quel que soit l'âge de la lampe, admettons qu'elle consomme toujours $20 \times 3,5 = 70$ watts; au bout de 1000 heures, la lampe exigerait au moins $\frac{70}{13} = 5,38$ watts par bougie et la dépense aurait augmenté dans le rapport de $\frac{5,38}{3,50} = 1,54$.

Au taux de $0^c,067$ le watt-heure, la bougie-heure coûterait d'abord $0^c,235$ et son prix s'élèverait ensuite à $0^c,361$.

Il n'est donc pas avantageux de trop prolonger la durée des lampes; au prix de $1^{fr},65$ la lampe de 5 à 32 bougies, le plus grand bénéfice correspond à une durée de 400 heures environ.

26. *Déterminer le degré d'incandescence d'un foyer de lumière.*

Le Congrès des électriciens, tenu à Paris en 1889, donne ce nom au quotient des intensités relatives à la carcel étalon, des radiations couleur jaune orangé de longueur d'onde égale à 582 et couleur rouge de longueur d'onde égale à 657. On détermine cette valeur en interposant devant les foyers des cuves de 5^{mm} d'épaisseur, renfermant d'abord une solution de chlorure double de nickel et de fer, puis une solution rouge de bichromate de potasse, ou plus rigoureusement un verre rouge choisi à cet effet.

Le Congrès a émis le vœu que l'indication de la puissance lumineuse d'une lampe soit toujours accompagnée de celle de son degré d'incandescence correspondant à cette puissance.

27. *Une lampe à arc, entourée d'un globe opalin, dont le coefficient d'absorption est égal à* 22 *pour* 100, *a une puissance lumineuse de* 45 *carcels, réduite à* 38 *carcels par le*

globe; elle est placée à 8^m *du sol; quel est l'éclairement moyen d'un cercle de* 10^m *de rayon?*

Le globe nous permet d'admettre que le foyer émet des rayons d'égale intensité dans toutes les directions; h étant la hauteur du foyer, l'éclairement ε produit à une distance l suivant l'horizontale est

$$\varepsilon = \frac{I \cos \alpha}{(l^2 + h^2)} = I \frac{h}{(l^2 + h^2)\sqrt{l^2 + h^2}} = I \frac{h}{(l^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A une distance x, comptée sur l'horizontale, on aurait donc

$$\varepsilon_x = I \frac{h}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La quantité de lumière reçue sur une couronne annulaire de rayon x, de largeur dx, serait

$$\varepsilon_x \times 2\pi x\, dx = I \frac{2\pi h x\, dx}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour connaître la quantité de lumière tombant sur le cercle de rayon l, il faut intégrer cette expression; or nous avons

$$I 2\pi h \int_0^l \frac{x\, dx}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = I 2\pi \frac{\left[(l^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} - h\right]}{(l^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'éclairement moyen sera

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_l}{\pi l^2} = 2 I \frac{\left[(l^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} - h\right]}{l^2 (l^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Passant aux données du problème, nous trouvons

$$\varepsilon_m = 2 \times 38 \times 0{,}0037 = 0{,}28 \text{ carcel à } 1^m.$$

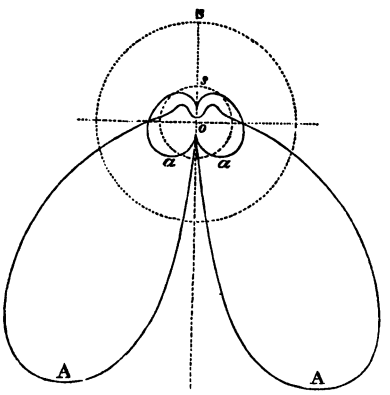
28. *Calculer l'intensité sphérique d'un foyer lumineux.*

L'intensité moyenne sphérique d'un foyer est la quantité de lumière que recevrait normalement l'unité de surface d'une sphère de rayon 1, ayant le foyer pour centre, en admettant

que la quantité totale de lumière émise soit répartie uniformément.

On sait que cette répartition n'a lieu exactement pour aucun foyer; une lampe à huile n'émet, dans une direction inclinée de 50° sous l'horizon, que $\frac{1}{5}$ de ce qu'elle donne dans le plan horizontal; l'intensité maximum A d'une lampe électrique à courants continus, dont le charbon positif est en haut, correspond à un angle de 50° avec le plan horizontal (*fig.* 50), d'après M. Fontaine; une lampe à courants alter-

Fig. 50.



natifs donne une répartition plus égale, marquée par la courbe *a* de la même figure.

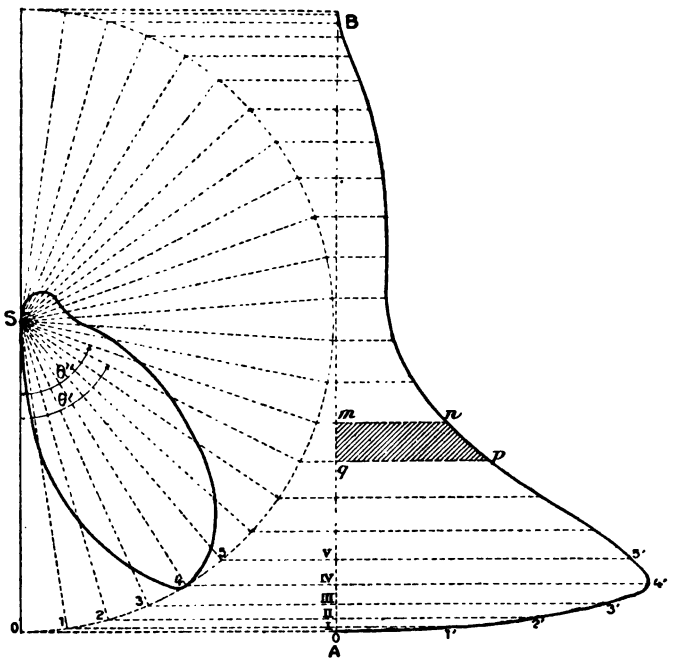
Or on demande l'intensité sphérique moyenne de la courbe A.

On la détermine graphiquement par le procédé de la *fig.* 51, en menant les rayons vecteurs S1, S2, S3, S4, ..., et en projetant leurs extrémités en I, II, III, IV, ..., puis en prenant les ordonnées I1′, II2′, III3′, ... égales aux longueurs des rayons vecteurs interceptées par la courbe des intensités à partir de S. L'intensité moyenne sphérique est représentée par le quotient de la surface A1′2′3′4′...B par la base AB.

En effet, représentons par I_θ l'intensité d'un rayon envoyé dans une direction θ : soient deux rayons infiniment voisins déterminés par les angles θ et $(\theta + d\theta)$: la hauteur de la zone

limitée par ces directions est $\cos\theta\, d\theta$, sa surface est $2\pi\cos\theta\, d\theta$. Elle reçoit donc une quantité de lumière $I_\theta 2\pi\cos\theta\, d\theta$. In-

Fig. 51.



tégrons entre les limites θ' et θ''; cette zone reçoit une quantité $\int_{\theta'}^{\theta''} I_\theta 2\pi\cos\theta\, d\theta =$ surface $mnpq$.

La surface totale du diagramme représente donc la somme des radiations émises dans toutes les directions, et l'on obtient évidemment la moyenne en divisant cette surface par AB.

La surface de ce diagramme se mesurera par la formule de Simpson, ou mieux encore au planimètre d'Amsler.

FIN.

18796 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

DEC 4 1895
JUN 25 1895
SEP 24 1895
MAY 5 1896
DUE APR 30 1896

Phys 3480.5
Problemes et calculs pratiques d'
Cabot Science 003453539
3 2044 091 960 583